$\varepsilon-$算法とチューニング例

以下の3つのケースを考える。$(\alpha=0.2)$

(1)　2次元積分

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{(xy(x+y))^{\alpha}}dydx$$

解析解 $=1.66762994758579826$

(2)　3次元積分

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{(xyz(x+y+z))^{\alpha}}dzdydx$$

解析解 $=1.88787303406103035$

(3) 4次元積分

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{(xyzu(x+y+z+u))^{\alpha}}dudzdydx$$

解析解 $=2.21178596178275022$

二重指数関数型積分法

倍精度演算,分点数$N = 448$

刻み幅$h = 0.5^6$,変数変換区間$[10^{-30}, 1 - 2^{-53}]$

X5570　1CPU実行結果

(1) 2次元積分

result=　1.66762994758580

gosa=　0.000000000000000E+000

(2) 3次元積分

result=　1.88787303406104

gosa=　7.105427357601002E-015

elapse=　1.91879999998491　　sec

(3) 4次元積分

result=　2.21183422401171

gosa=　4.826222895637500E-005

elapse=　820.749099999986　　sec

精度的に4次元積分が悪い。

$x = y = z = u = \varepsilon$とすると

$$\frac{1}{(xy(x+y))^{\alpha}} = \frac{1}{\varepsilon^{3\alpha} 2^{\alpha}} \quad \text{(2次元)}$$

$$\frac{1}{(xyz(x+y+z))^{\alpha}} = \frac{1}{\varepsilon^{4\alpha} 3^{\alpha}} \quad \text{(3次元)}$$

$$\frac{1}{(xyzu(x+y+z+u))^{\alpha}} = \frac{1}{\varepsilon^{5\alpha} 4^{\alpha}} \quad \text{(4次元)}$$

$\alpha = 0.2$より4次元積分では

$$\frac{1}{(xyzu(x+y+z+u))^{\alpha}} = \frac{1}{\varepsilon \sqrt[5]{4}} \quad \text{となり,}$$

$\frac{1}{\varepsilon}$の項がでる事による。2次元は$\frac{1}{\varepsilon^{0.6}}$,3次元は$\frac{1}{\varepsilon^{0.8}}$のため精度上の問題は 発生しない。

このため4次元積分ではxyzu (x+y+z+u) +iepsの形にしてeps算法を使用する。
今回はepsの値は2分法により計算した。

```
X5570  1cpu
result=   2.21178596178275
  gosa=  3.552713678800501E-015
  elapse=   1834.49350000000        sec

E5-2670 16smp
result=   2.21178596178275
  gosa=  3.996802888650564E-015
  elapse=   110.754800000001        sec

Phi5110P  240smp
 result=   2.21178596178275
  gosa=  4.440892098500626E-015
  elapse=   30.4555000000000        sec
```

対称性を利用した低次 元化

以下の式で積分 の次元を下げる事により

大幅な演算量削 減が行える。

(1) 2次元積分

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{(xy(x+y))^\alpha}dydx = \frac{2}{2-3\alpha}\int_0^1 \frac{1}{(x(1+x))^\alpha}dx$$

(2) 3次元積分

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{(xyz(x+y+z))^\alpha}dzdydx$$

$$= \frac{6}{3-4\alpha}\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{1-2\alpha}}{(y(1+x+xy)^\alpha}$$

(3) 4次元積分

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{(xyzu(x+y+z+u))^\alpha}dudzdydx$$

$$= \frac{24}{4-5\alpha}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{y^{1-2\alpha}x^{2-3\alpha}}{(z(1+x+xy+xyz))^\alpha}dzdydx$$

X5570 1cpu 実行結果

(1) 2次元積分
result= 1.66762994758580
gosa= 2.220446049250313E-016

(2) 3次元積分
result= 1.88787303406104
gosa= 6.661338147750939E-015
elapse= 1.600000000325963E-002 sec

(3) 4次元積分(eps算法未使用)
result= 2.21183422401171
gosa= 4.826222895548682E-005
elapse= 2.09769999998389 sec

(4) 4次元積分(eps算法使用)
result= 2.21178596178283
gosa= 8.082423619271140E-014
elapse= 5.46250000002328 sec