

# 多次元高精度ブラソフソルバーの開発

素粒子・原子核・宇宙「京からポスト京に向けて」シンポジウム

2017年2月17日 （筑波大学 東京キャンパス）

筑波大学 計算科学研究センター

吉川 耕司

# サブ課題Cの目標

- ▶ 大規模な宇宙論的構造形成シミュレーションの共分散解析による広域銀河サーベイの統計解析 (吉田・石山)
- ▶ ブラックホール降着円盤の一般相対論的輻射磁気流体シミュレーション及びグローバルシミュレーション (松元・大須賀)
- ▶ 大規模なプラズマ粒子シミュレーションによる磁気再結合と高エネルギー粒子加速過程の解明 (松本)
- ▶ Vlasovシミュレーションによる自己重力系の数値シミュレーション (吉川)
  - 宇宙大規模構造形成におけるニュートリノの力学的な影響
  - ストレッチ目標

Vlasovシミュレーションを用いた磁気プラズマの運動論的シミュレーション  
(簗島・松本)

# Vlasov シミュレーション

- ▶ 自己重力系（銀河・銀河団・宇宙大規模構造）・磁気プラズマを対象
- ▶ 重力N体シミュレーションやPICシミュレーションといった粒子シミュレーション
  - 位相空間上の物質分布をモンテカルロ的に粒子でサンプリングして計算
  - 必然的に物理量にショットノイズが入る
  - 分布関数のテイル部分が重要な役割を果たす運動論的な不安定性を正確に扱えない
  - PICシミュレーションでは、電磁場を解く最小スケールがDebye長に固定される
- マクロなMHDスケールでの数値シミュレーションは困難
- ▶ 粒子シミュレーションの代わりにVlasov方程式 (無衝突ボルツマン方程式)を直接数値シミュレーション

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0$$

$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$  : 6次元位相空間上の分布関数

# Vlasovシミュレーション

## ▶ Vlasov シミュレーションの特徴

- 粒子シミュレーションのような内在的なショットノイズがない
- 運動論的な不安定性（無衝突減衰・Landau damping）を正確に扱える
- 速度分散の大きな成分のシミュレーションに向いている

↔ 速度分散が小さい成分は粒子シミュレーションでOK

- 磁気プラズマのVlasovシミュレーションではPICシミュレーションのような最小スケールについての制約がない

→ 大域的なMHDスケールまでの一貫した取り扱いが可能

# 自己重力系Vlasov-Poisson シミュレーション

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

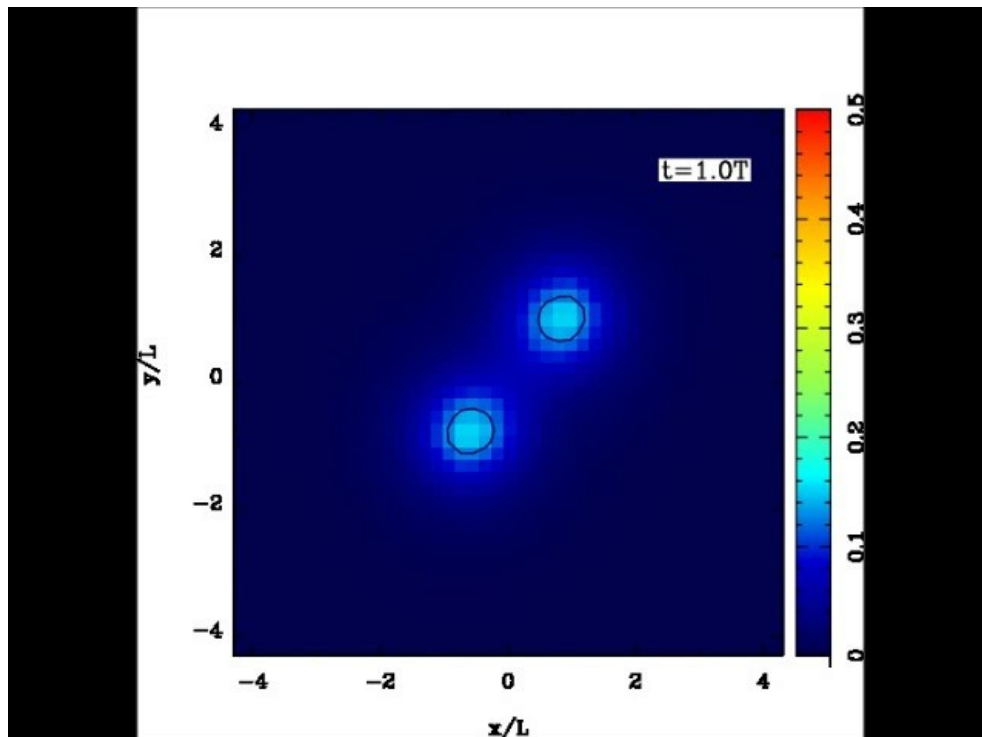
$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho = 4\pi G \int f d^3 \vec{v}$$

▶ Yoshikawa, Yoshida, Umemura (2013)で6次元位相空間での計算を初めて実現

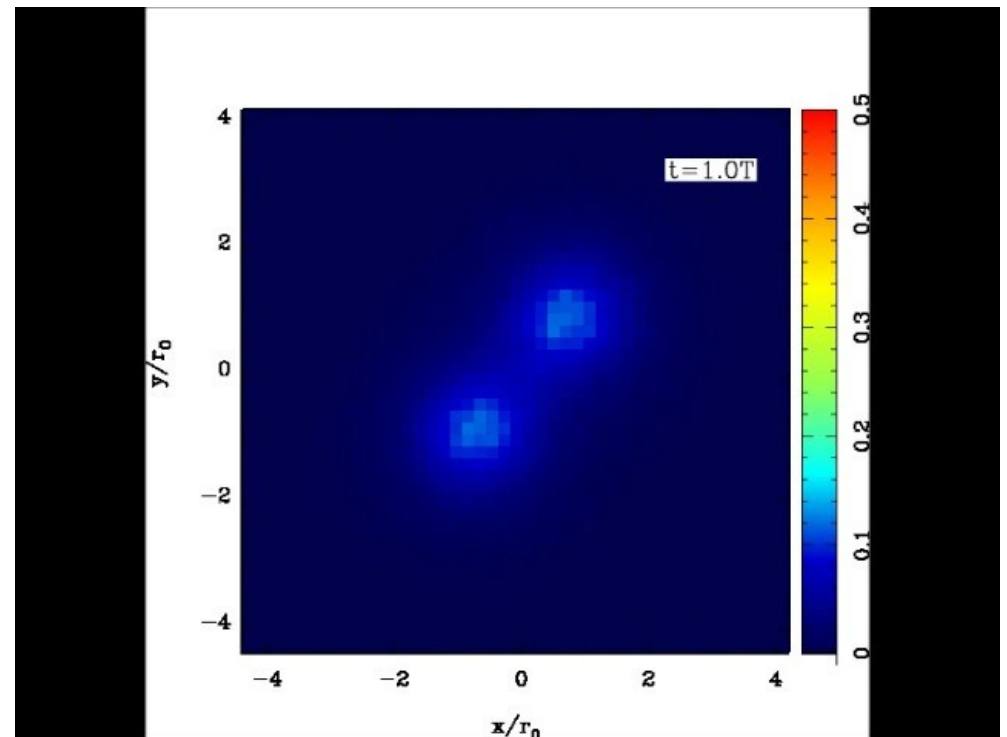
▶ 方向分割で6本の一次元移流方程式にわけて解く

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Vlasov シミュレーション



N体シミュレーション



# 宇宙大規模構造におけるニュートリノの影響

## ▶ ニュートリノ振動の発見

宇宙に大量に存在するニュートリノが質量を持つことが明らかに

→ 重力相互作用を通じて大規模構造形成に影響

## ▶ ニュートリノの及ぼす力学的影響

free streaming、collisionless damping

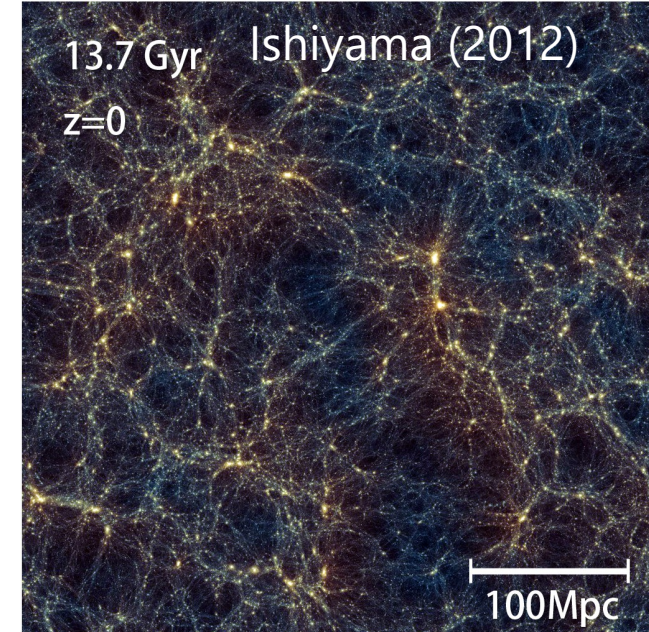
- 速度分散  $\sigma$  を持つ物質では、 $k_{\text{FS}} = \left( \frac{4\pi G\rho}{\sigma^2} \right)^{1/2}$  より大きいスケールの

密度揺らぎしか重力不安定性で成長しない。

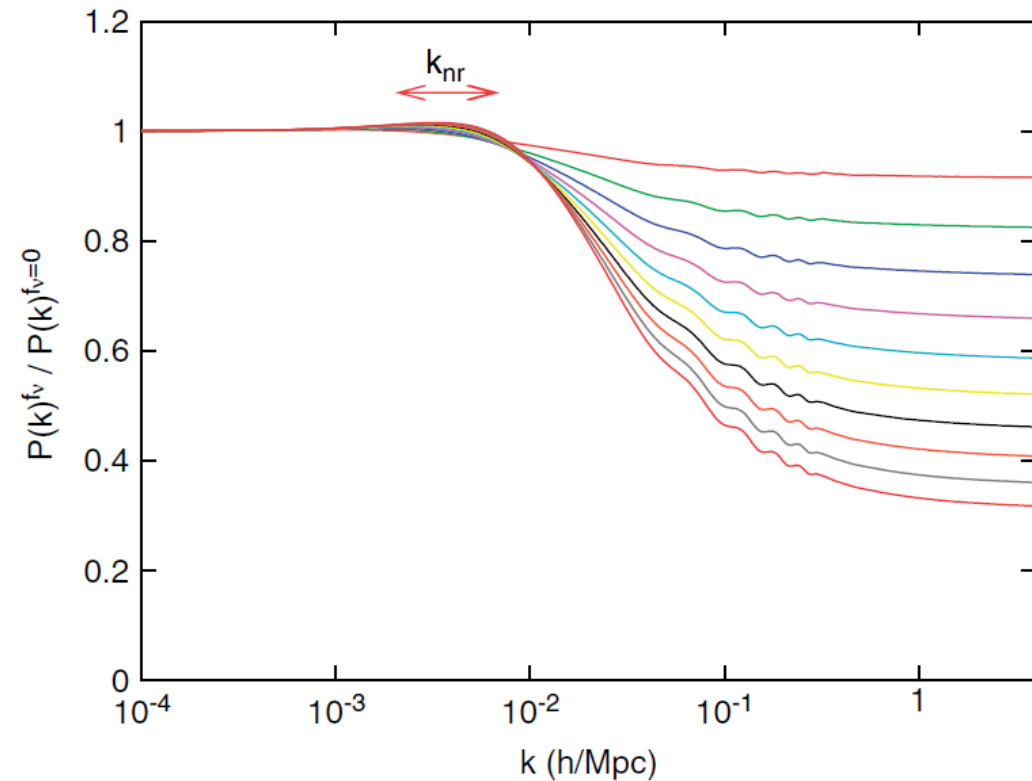
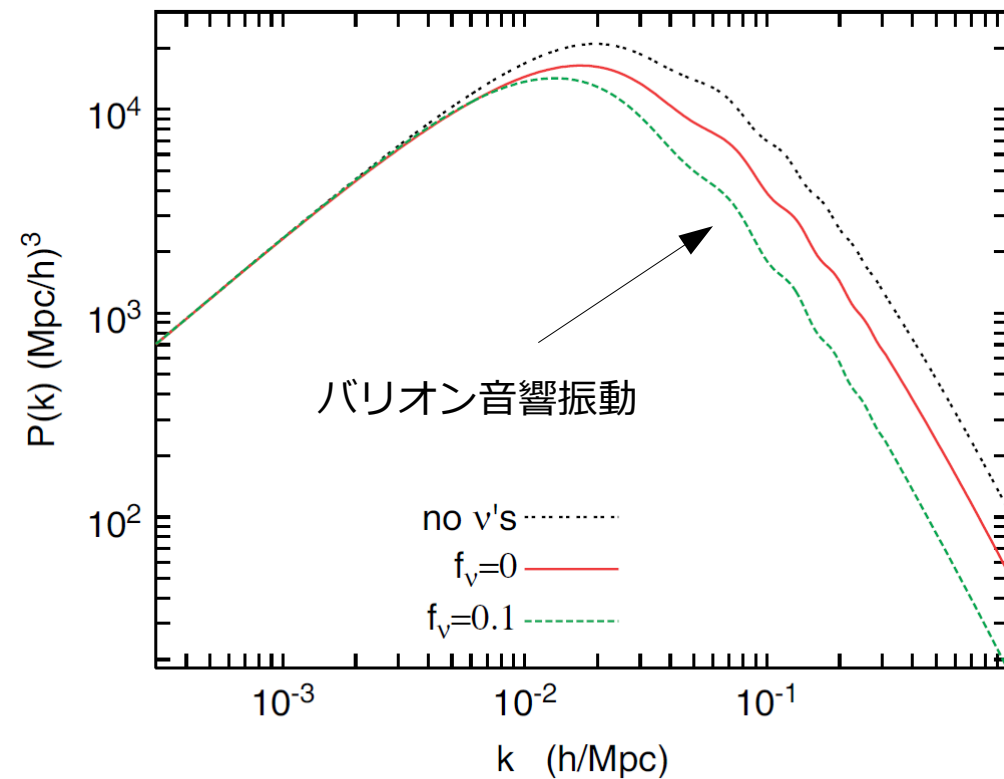
- 非相対論的なニュートリノの速度分散

$$\sigma \sim 150(1+z) \left( \frac{m_\nu}{1\text{eV}} \right)^{-1} \text{km/s}$$

→ 減衰スケール：  $\lambda_{\text{FS}} \sim 640 \left( \frac{\Omega_m}{0.3} \right)^{-1/2} \left( \frac{m_\nu}{1\text{eV}} \right)^{-1/2} h^{-1} \text{Mpc}$



# ニュートリノの構造形成への力学的影響



▶ ニュートリノの質量によって減衰の度合いが異なる

➡ 銀河の広域サーベイによってニュートリノ質量を測定可能

▶ 注目すべきスケールはバリオン音響振動のスケールよりも大きい

▶ 将来の大規模銀河サーベイでニュートリノの質量を測定可能かも

(Euclid、Square Kilometer Array)

# LSS Simulations with CDM and Neutrinos

- ▶ hybrid of N-body and Vlasov-Poisson simulations

速度分散の小さなCDMはVlasovシミュレーションでやる意味はあまりない。

→ CDMのダイナミクスはN体シミュレーションで

- cold dark matter : N-body simulation

$$\frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} + 2H \frac{d\vec{x}_i}{dt} = -\frac{1}{a^2} \nabla \phi$$

- neutrino (hot dark matter) : Vlasov-Poisson simulation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \left[ H\vec{v} + \frac{\nabla \phi}{a} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

- Poisson equation

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 (f_{\text{cdm}} \delta_{\text{cdm}} + f_{\nu} \delta_{\nu})$$



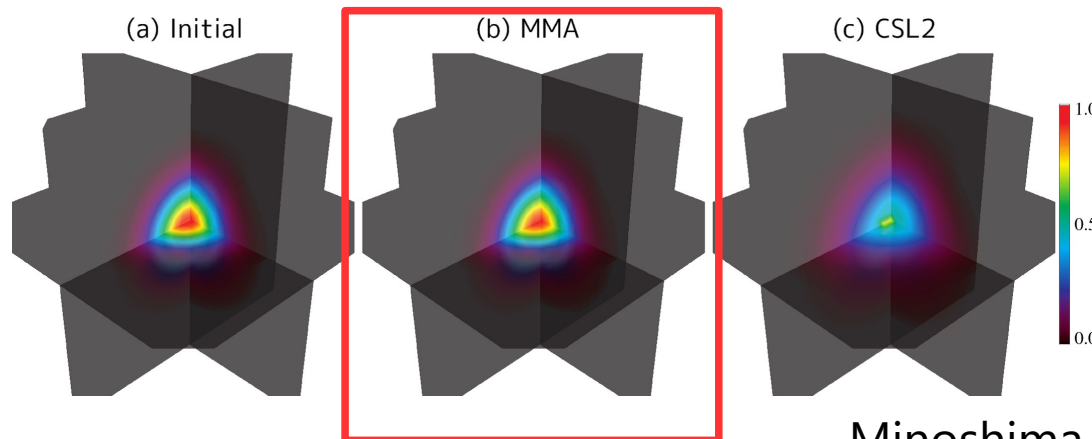
# Vlasov-Maxwell シミュレーション

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 \int q \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{v} \end{array} \right.$$

▶ 基本的な数値解法はVlasov-Poissonシミュレーションと同じ

▶ 磁場のLorentz 力による移流回転は数値的に大きなチャレンジ



MMAスキームの開発

必要メモリが多い

Minoshima, Matsumoto, Amano 2013

並みのスキームではすぐに数値拡散で雲散霧消してしまう。

# Vlasov-Maxwell シミュレーション

## ▶ 磁気リコネクション

- MHDシミュレーションでは、電気抵抗モデルを手で与える必要がある。
- PICシミュレーション：最小スケールの制約からマクロなMHDスケールまで計算が困難
- Vlasov シミュレーションで、MHDスケールでのエネルギー解放の素過程を解く

## ▶ 磁気回転不安定性

- high ベータプラズマは電子の速度分散が大きくPICシミュレーションには向かない
- 磁気リコネクションによる不安定性の飽和過程・磁気乱流と粘性の発達過程

## ▶ PICシミュレーションとVlasovシミュレーションとのカップリング

- 質量が大きく速度分散が小さいイオン成分は粒子法で解いた方がよい
- イオン成分はPICシミュレーションで、電子の運動はVlasovシミュレーションをもちいるハイブリッドシミュレーション
- イオンや電子が感じる電磁場は共通で、両方の運動を合わせて求める。

# 高次精度 Vlasov Solver の開発

- ▶ 6次元位相空間を離散化しなければならない

必要なメモリ容量が膨大        解像度を向上させるのにメッシュ数を増やすのは現実的ではない

- ▶ 高次精度の移流スキームを用いて実効的な解像度を向上させる

我々の6次元Vlasov-Poissonシミュレーション：PFC スキーム（空間3次精度）

## 移流スキームに対する要請

- 単調性 (monotonicity)
- 正值性 (positivity)
- 最大値の原理 (maximum principle)

- ▶ 単調性・正值性を備えた空間5次・7次精度の移流スキームを開発

- 実はもっと高次のスキームも構築可能
- 時間積分: TVD Runge-Kutta法 と semi-Lagrange法

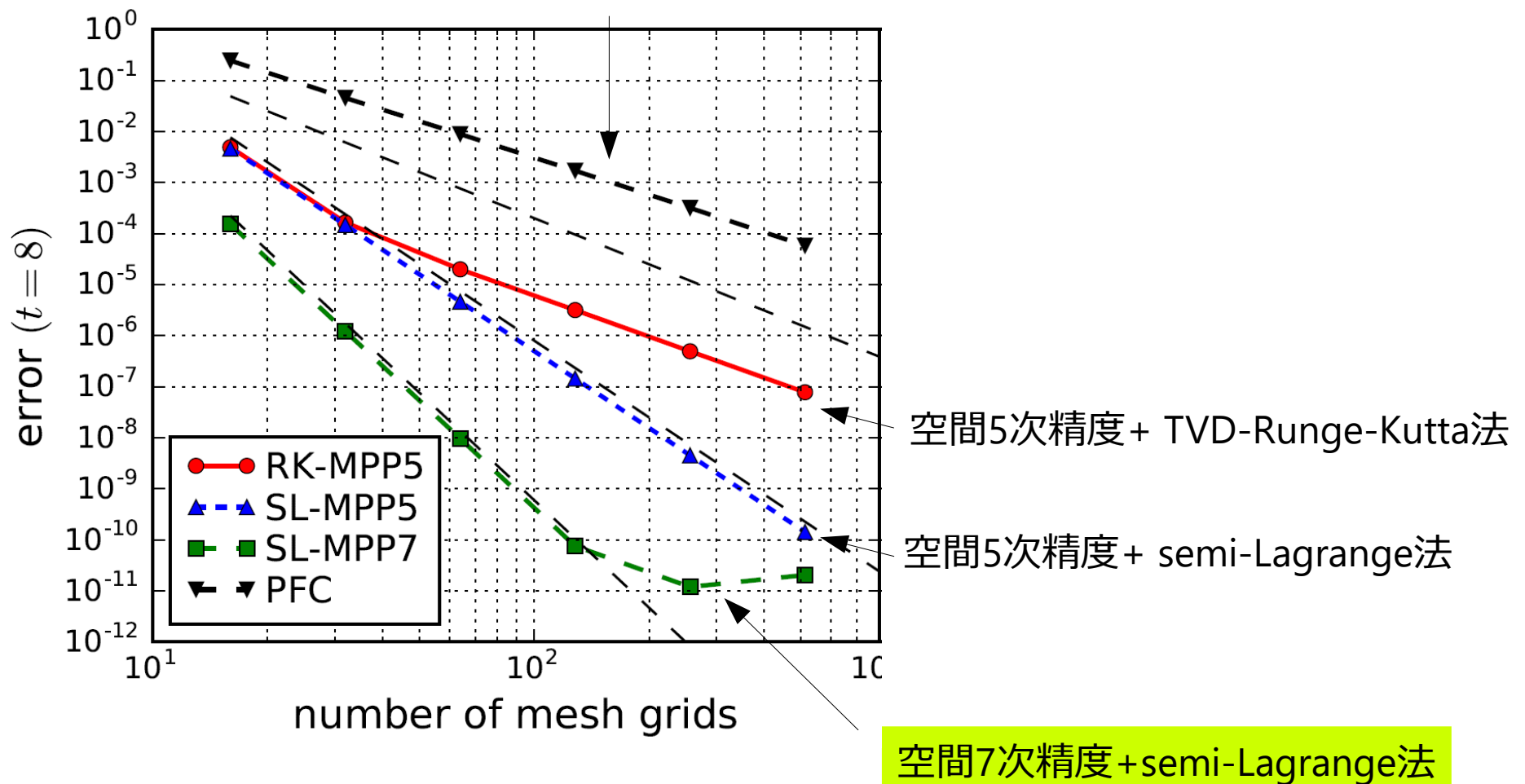
# 高精度 Vlasov Solver の開発

- ▶ 時間積分に3段3次のTVD Runge-Kutta法とsemi-Lagrange法の採用

semi-Lagrange法：時間精度が空間精度とリンク・時間積分が単段で計算コスト安い

- ▶ 正弦波の移流

空間3次精度 PFCスキーム



# 高精度 Vlasov Solver の開発

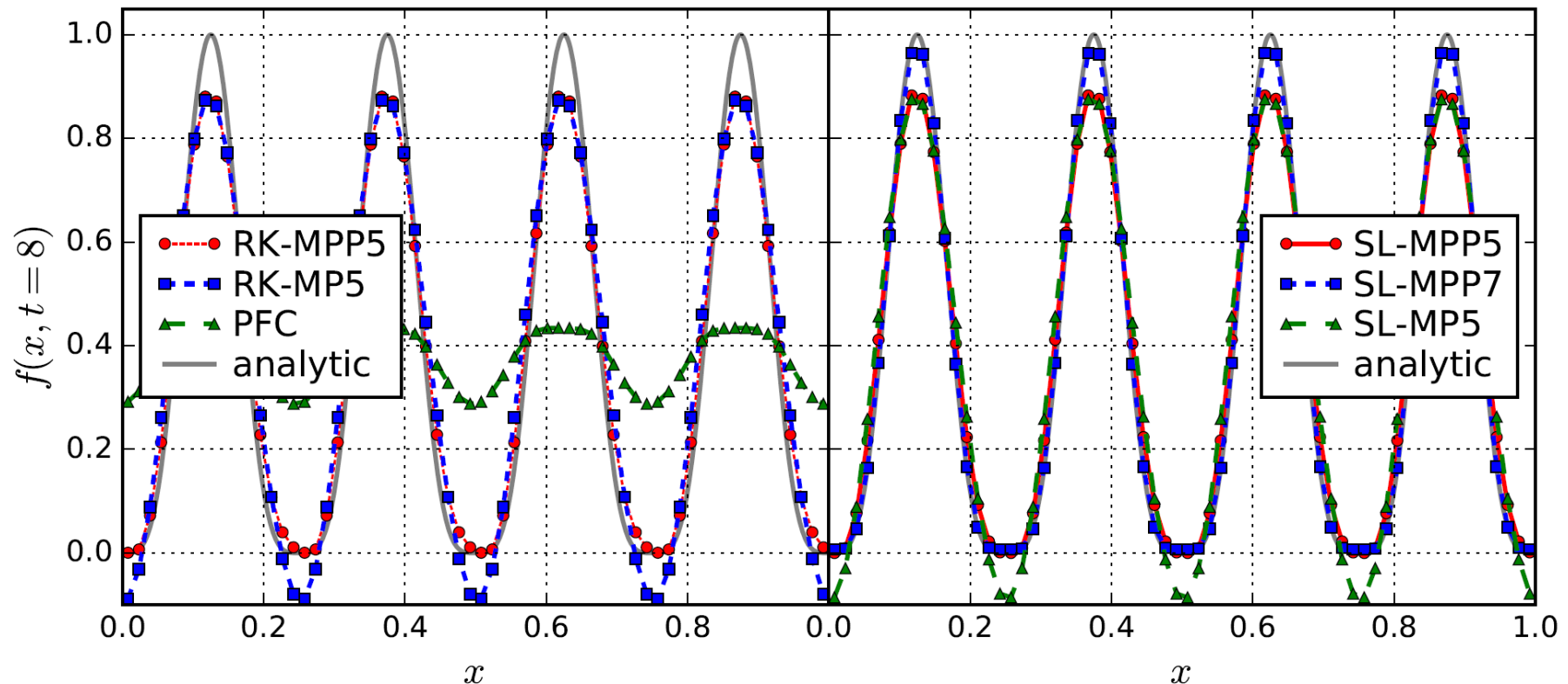
▶ 流束制限法による正值性の確保 (positivity limiter)

$$F_{i+1/2} = (1 - \theta_{i+1/2}) \underbrace{F_{i+1/2}^{\text{UW}}}_{\text{1次風上スキームの数値流束}} + \theta_{i+1/2} \underbrace{F_{i+1/2}^{\text{MP}}}_{\text{高次のMPスキームの数値流速}}$$

1次風上スキームの数値流束

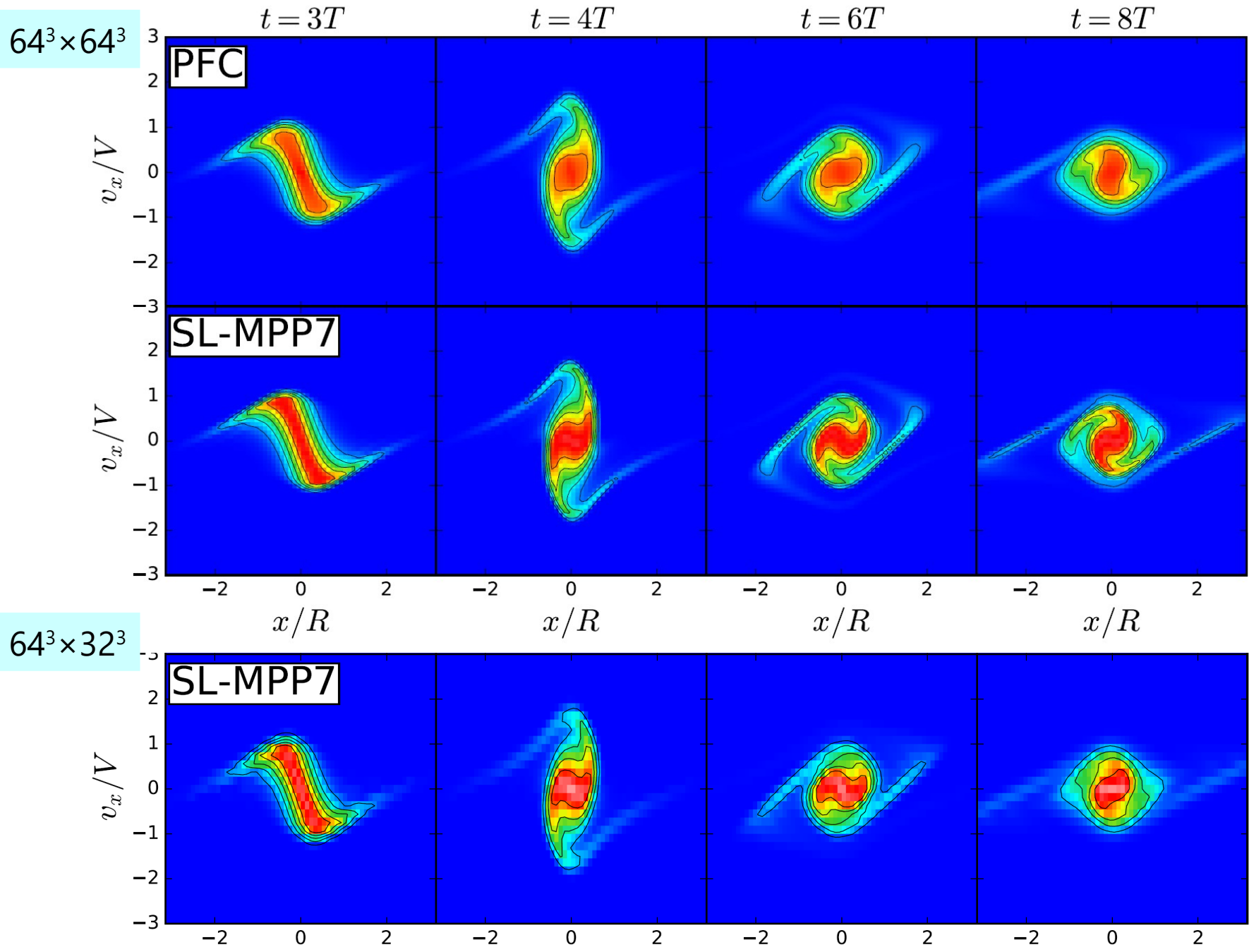
高次のMPスキームの数値流速

$f(x) = \sin^4(4\pi x)$  の移流



# Vlasov-Poisson シミュレーションへの応用

▶ 初期ビリアル比が0.5の一様密度球の重力収縮

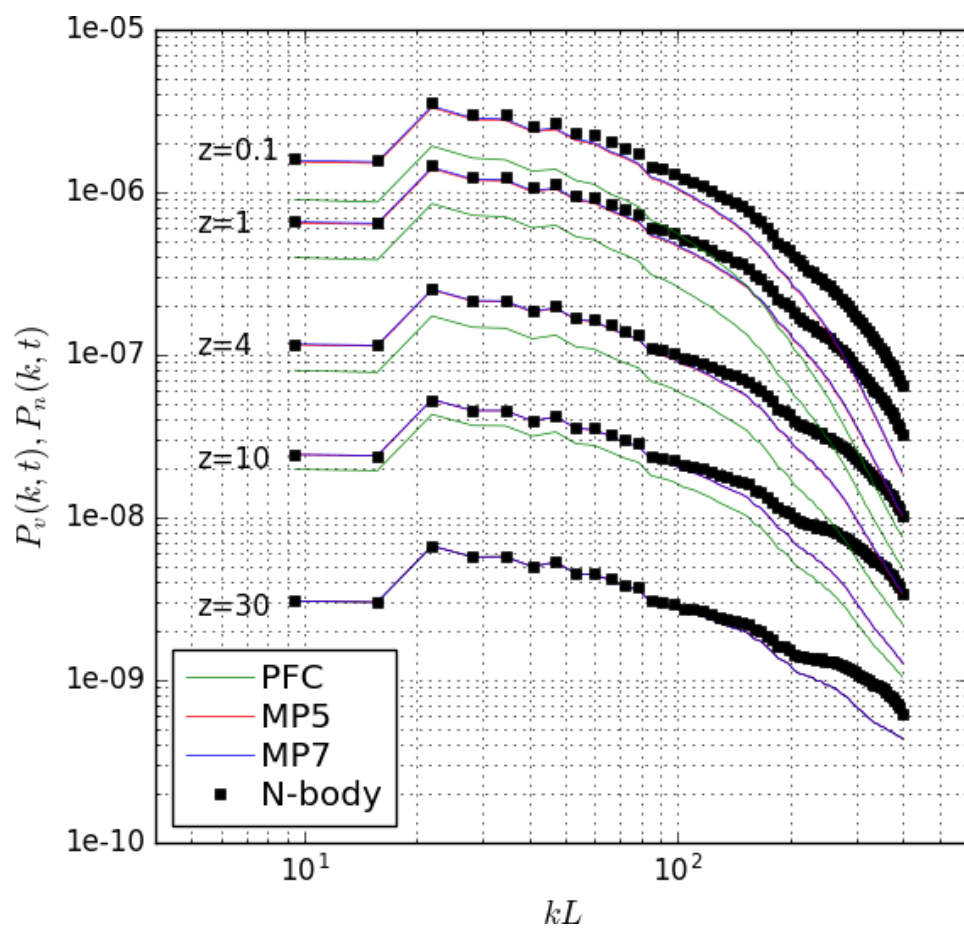


# 宇宙大規模構造のVlasovシミュレーション

▶ 宇宙論的共動座標系での“計算できる”Vlasov方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \left[ H\vec{v} + \frac{\nabla\phi}{a} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad \boldsymbol{v} = a(t)\dot{\boldsymbol{x}}$$

移流速度が場所依存



- CDMだけの宇宙大規模構造をVlasovシミュレーション
- $L=2000 h^{-1} \text{ Mpc}$ ,  $N^x=128^3$ ,  $N^v=32^3$
- PFCスキームは大スケールの線形理論にすら合わない
- SL-MPPスキームはちゃんと線形成長は再現できた。
- 小さいスケールでN体シミュレーションと食い違うのは分解能のせい

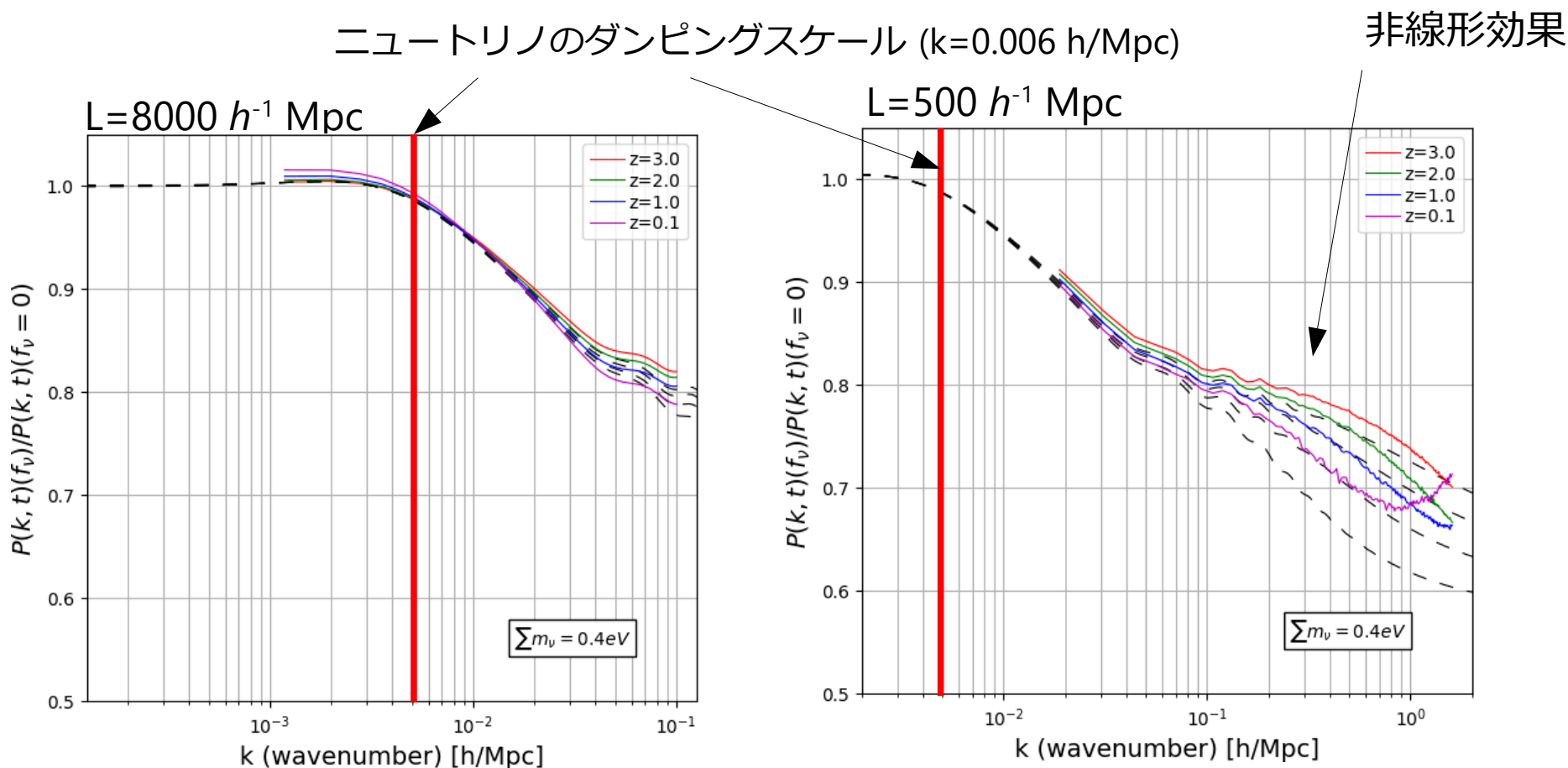


# CDM+ニュートリノの大規模構造形成

## ▶ N体シミュレーションとVlasovシミュレーションのハイブリッドシミュレーション

- CDMはN体シミュレーション： $N=512^3$
- ニュートリノはVlasovシミュレーション： $N^x=128^3$ 、 $N^y=32^3$   $\sum m_\nu = 0.4\text{eV}$

## ▶ ニュートリノの有り無しによるCDMの密度揺らぎのパワースペクトルの比



破線：摂動理論による計算結果



# Vlasov-Maxwellシミュレーションへの応用

▶  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ による位相空間での分布関数の剛体回転

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

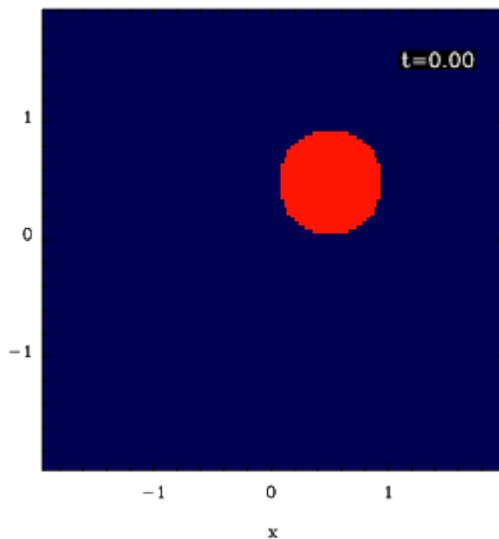
開発した高次精度スキームで正確に解けるか？

▶ 2次元での剛体回転のテスト計算

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

- 空間7次精度スキームは100回転後も初期状態をほぼ保つ

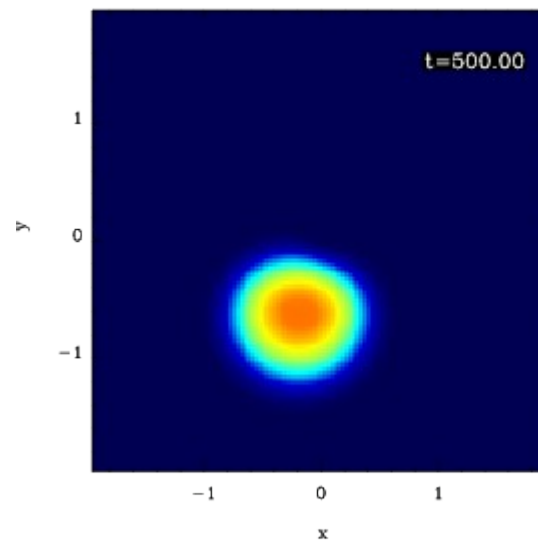
初期条件



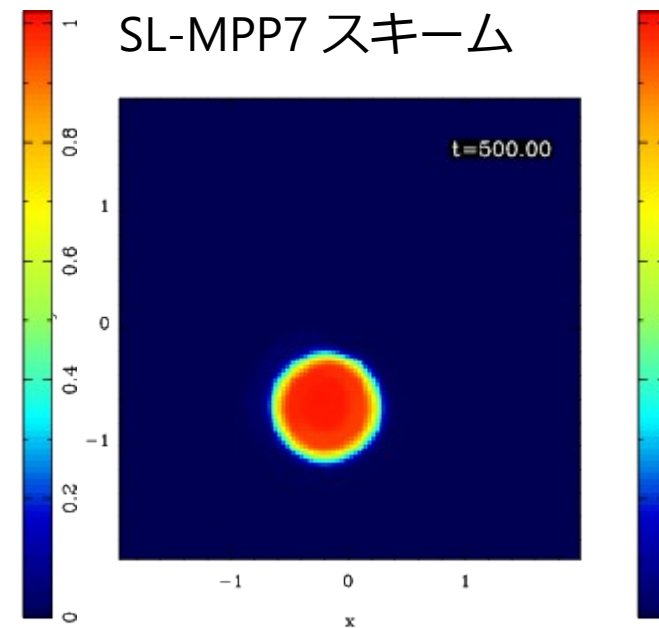
約100回転後



PFC スキーム

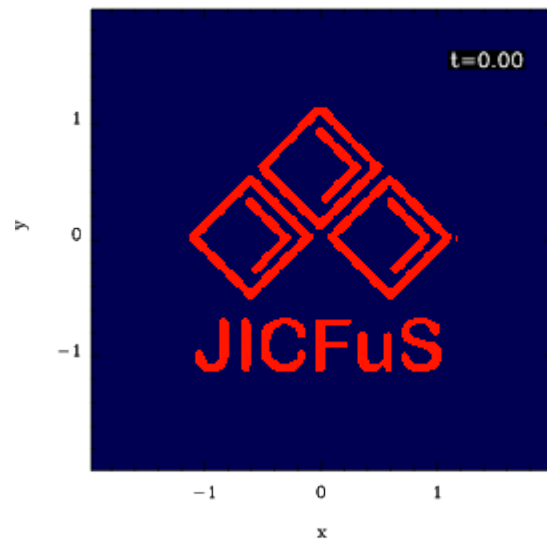


SL-MPP7 スキーム



# Vlasov-Maxwell シミュレーション

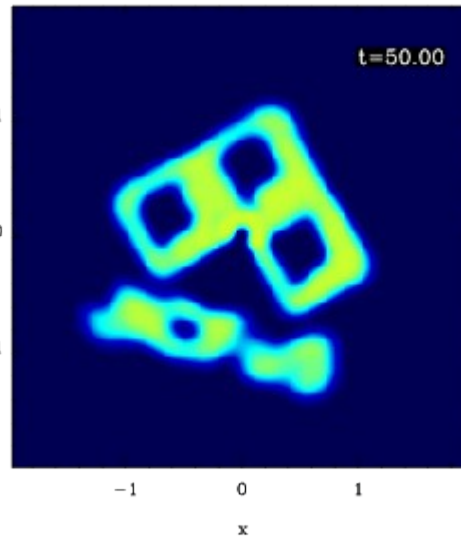
▶ JICFuS のロゴを回してみる



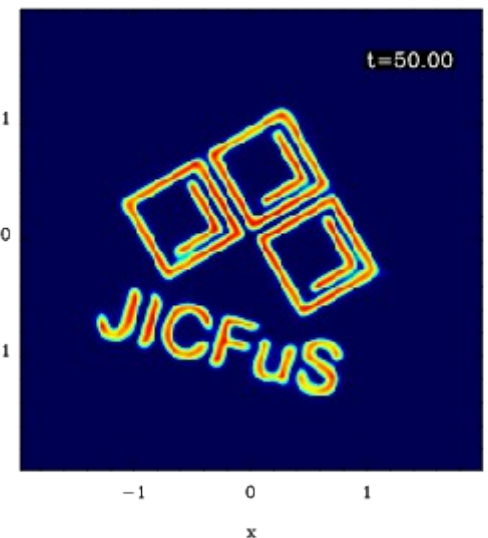
10回転



PFC スキーム

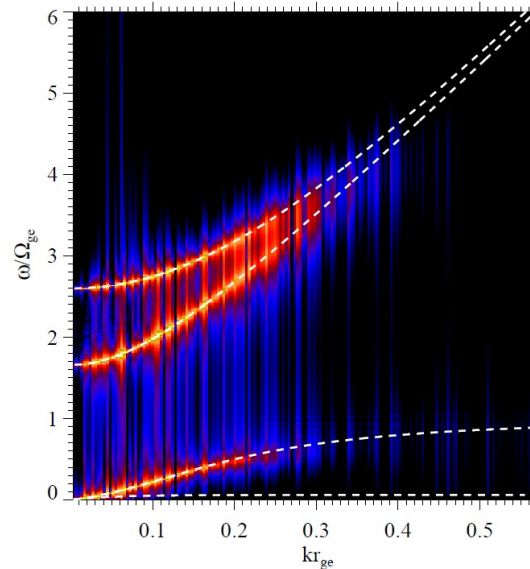


SL-MPP7スキーム

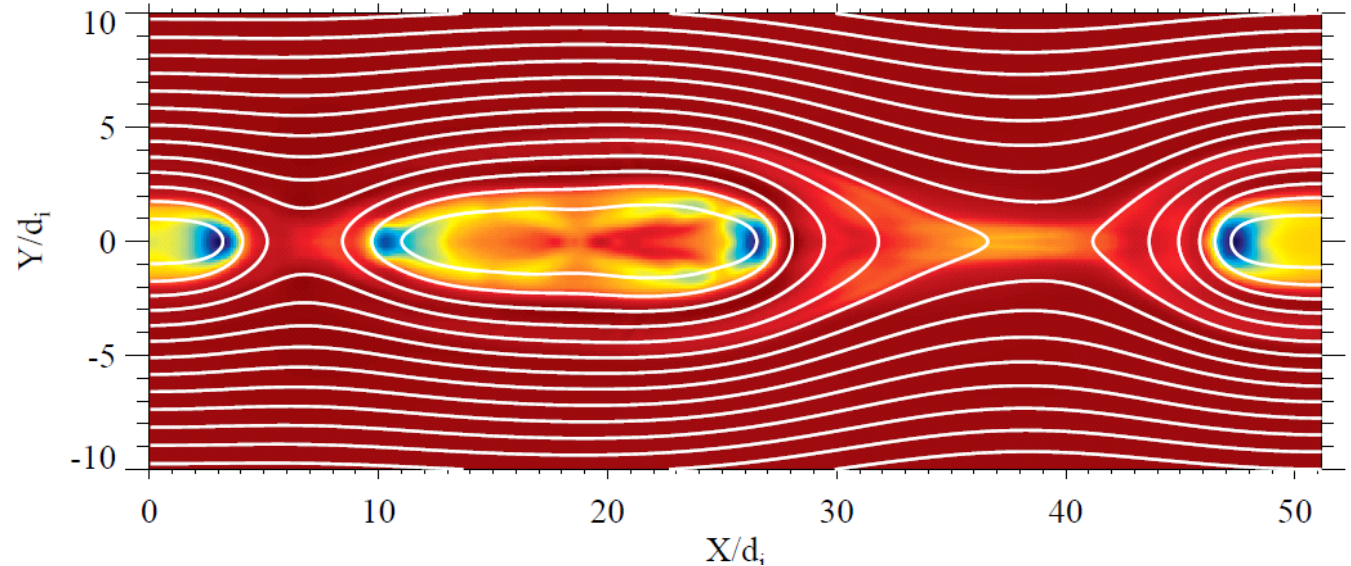


- Vlasov-Maxwellシミュレーション (簗島さん)

parallel wave propagation (4D)



磁気リコネクション (5D)



# まとめ

- ▶ 自己重力系と宇宙磁気プラズマにおいてVlasovシミュレーションを推進
  - 自己重力系：宇宙大規模構造形成におけるニュートリノの力学的影響
  - 宇宙磁気プラズマ：磁気回転不安定性・磁気リコネクションの運動論的解明
- ▶ 高次精度の移流スキームを共同で開発
  - メッシュ数を増やせない制約のもとで数値シミュレーションの質を改善
  - 磁気プラズマでの磁場のLorentz力による分布関数の回転にも耐えうる
  - コードの最適化でも協力
- ▶ 粒子シミュレーションとVlasovシミュレーションのハイブリッドシミュレーション

|         | 粒子シミュレーション | Vlasovシミュレーション |
|---------|------------|----------------|
| 宇宙大規模構造 | CDM        | ニュートリノ(複数世代?)  |
| 磁気プラズマ  | イオン        | 電子             |