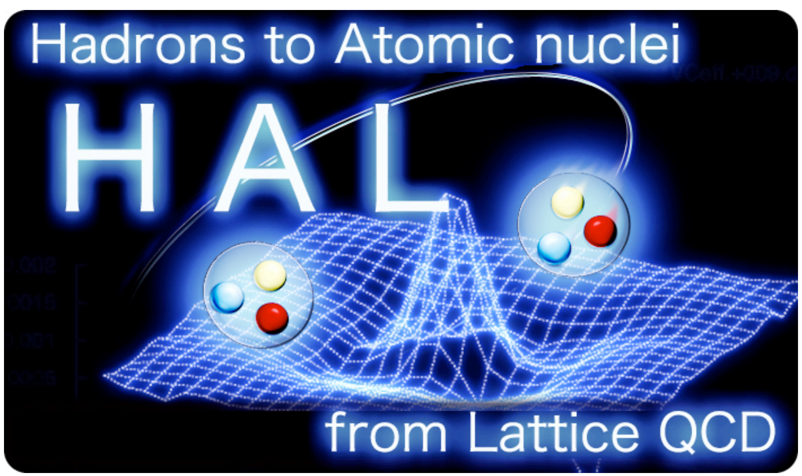
直接法とポテンシャル法の不整合の問題に関して

石井理修 (阪大RCNP)
for HAL QCD Coll.



Stony Brook Univ: T.Iritani

RCNP, Osaka Univ: N.Ishii, K.Murano
Univ. Tsukuba: H.Nemura, K.Sasaki,
Univ. Birjand: F.Etminan
RIKEN: T.Doi, T.Hatsuda, Y.Ikeda
Nihon Univ: T.Inoue
YITP(Kyoto): S.Aoki, T.Miyamoto,
S.Gongyo, D.Kawai

背景

◆ 重いクォーク質量領域のNNセクタの格子QCD計算で、
直接法とポテンシャル法に、結果の不一致がある。

◆ **PACS-CS Coll. & NPL QCD Coll.**
- ❖ $^1S_0$ & $^3S_1$ **どちらも引力**
- ❖ $^1S_0$ & $^3S_1$どちらにも<u>束縛状態あり</u>
- ❖ **smearing sourceを採用した**
  直接法

◆ **HAL QCD Coll.**
- ❖ $^1S_0$ & $^3S_1$ **どちらも引力**
- ❖ $^1S_0$ & $^3S_1$ どちらにも<u>束縛状態なし</u>
- ❖ **wall sourceを採用した**
  ポテンシャル法

この講演では、
ポテンシャル法の概要を復習した後、両者を比較する。

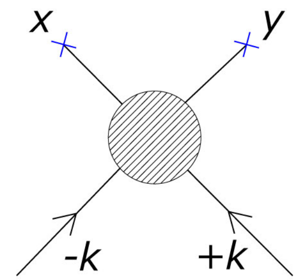
◆ Contents

HAL QCD 法の概要
（ポテンシャル法はうまくいっている事）

HALQCD 法

[Aoki,Hatsuda,Ishii,PTP123(2010)89]

◆Nambu-Bethe-Salpeter (NBS) 波動関数



$$\left\langle 0 \middle| T\left[N(x)N(y)\right] \middle| N(+k)N(-k),in \right\rangle$$

◆**S-matrixとの関係** (by LSZ reduction formula)

Bosonic notation
to avoid lengthy notations.

$$\left\langle N(p_1)N(p_2),out \middle| N(+k)N(-k),in \right\rangle_{\text{connected}}$$

$$=\left(iZ_N^{-1/2}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2\, e^{ip_1x_1}\left(\Box_1+m_N^2\right)e^{ip_2x_2}\left(\Box_2+m_N^2\right)\left\langle 0 \middle| T\left[N(x_1)N(x_2)\right] \middle| N(+k)N(-k),in \right\rangle$$

◆**同時刻NBS 波動関数**

[C.-J.D.Lin et al., NPB619,467(2001).]

$$\psi_k(\vec{x}-\vec{y}) \equiv \lim_{x_0\to+0} Z_N^{-1}\left\langle 0 \middle| T\left[N(\vec{x},x_0)N(\vec{y},0)\right] \middle| N(+k)N(-k),in \right\rangle$$

$$= Z_N^{-1}\left\langle 0 \middle| N(\vec{x},0)N(\vec{y},0) \middle| N(+k)N(-k),in \right\rangle$$

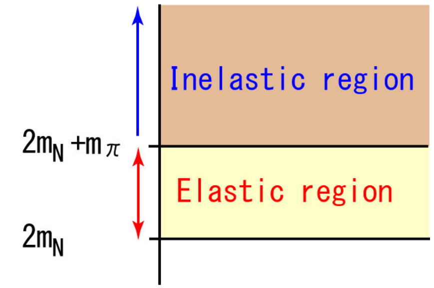
$$\simeq e^{i\delta(k)}\frac{\sin\left(kr+\delta(k)\right)}{kr}+\cdots \quad \text{as } r\equiv|\vec{x}-\vec{y}|\to \text{large}$$

(for S-wave)

❖**non-rela. 量子力学の散乱波動関数と全く同じ関数形**

HALQCD法:ポテンシャルの定義

◆同時刻 NBS 波動関数でポテンシャルを定義



$$\left(k^2/m_N - H_0\right)\psi_k(\vec{r}) = \int d^3r' U(\vec{r},\vec{r}')\psi_k(\vec{r}')$$

$$\text{for } 2\sqrt{m_N^2+k^2} < E_{\text{th}} \equiv 2m_N + m_\pi$$

$$H_0 \equiv -\frac{\nabla^2}{m_N}$$

◆U(r,r’) は、E-indep. (One can prove its existence.)

◆同時刻NBS波動関数を再現するように決定。

◆U(r,r’) は、散乱位相差 δ(k) に忠実。
（∵NBS波動関数と同時に、位相差も出る）

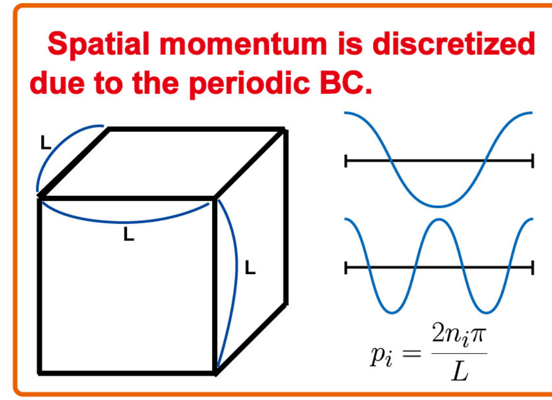
$$\psi_k(\vec{x}-\vec{y}) \simeq e^{i\delta(k)}\frac{\sin\left(kr+\delta(k)\right)}{kr}+\cdots \quad \text{as } r \equiv |\vec{x}-\vec{y}| \to \text{large}$$

HAL QCD 法

◆ground state saturation

$$C(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\exp\left[-E_n t\right]\sim c_0\exp\left[-E_0 t\right]$$

t → 大

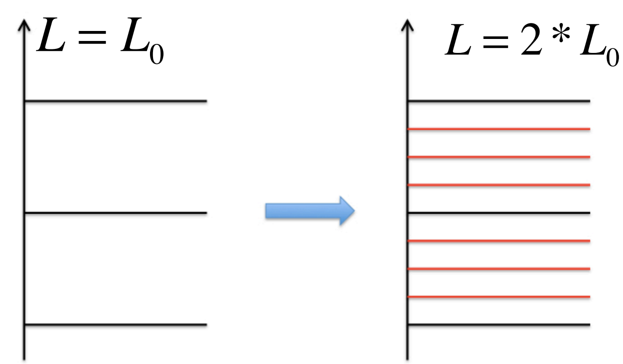


一般に、空間体積が大きくなると困難になる

$$\Delta E = E_{n+1}-E_n \sim \frac{1}{m_N}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$$

$$= O\left(1/L^2\right)$$

	L=3 fm	L=6 fm	L=9 fm	L=12 fm
ΔE	181.5 MeV	45.3 MeV	20.2 MeV	11.3 MeV



HAL QCD 法: ポテンシャルの決定

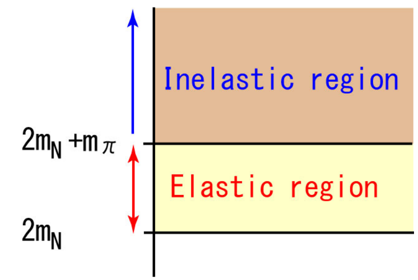
励起状態が混じっても、正しくポテンシャルを求められる。

[Ishii et al.,PLB712(2012)437]

◆ 定義： **R-correlator**

$$R(\vec{x}-\vec{y},t) \equiv e^{2mt} \left\langle 0 \middle| T\left[B(\vec{x},t) B(\vec{y},t) \cdot \overline{BB}(t=0) \right] \middle| 0 \right\rangle$$

$$= \sum_n \psi_{k_n}(\vec{x}-\vec{y}) \cdot \exp\left(-(E_n-2m)t\right) \cdot a_n$$



◆ HAL QCD pot. が、E-indep.に Schrodinger eq.を満たす事を利用

$$\left(-H_0 + k_n^2/m\right)\psi_{k_n}(\vec{r}) = \int d^3r' V(\vec{r},\vec{r}')\, \psi_{k_n}(\vec{r}')$$

➔ **time-dependent Schroedinger-like eq.**

$$\boxed{\left(-H_0 + \frac{1}{4m}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right) R(\vec{r},t) = \int d^3r' V(\vec{r},\vec{r}') R(\vec{r}',t)}$$

◆ **Elastic saturation だけが、必要となる。**

（Ground saturationの必要はない！）

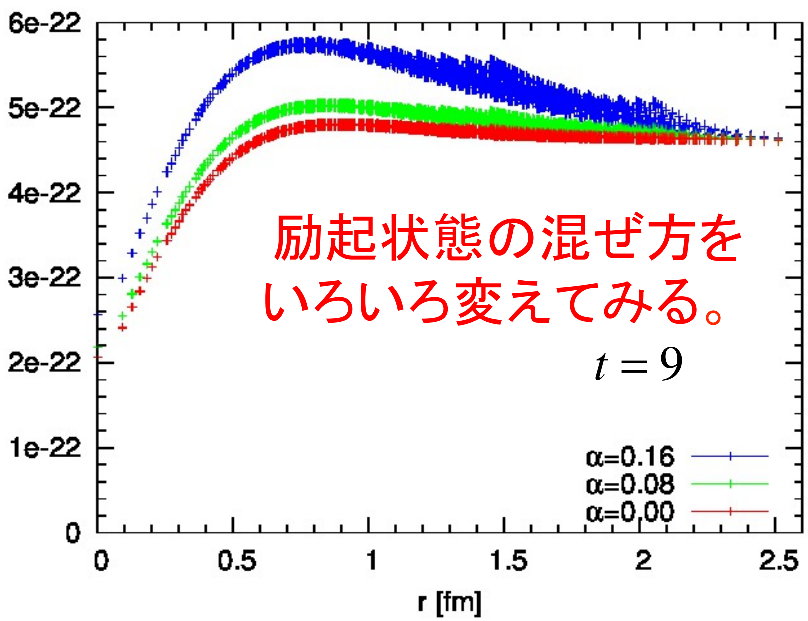
◆ **Elastic saturation は、ground state saturation.より遥かに楽。**

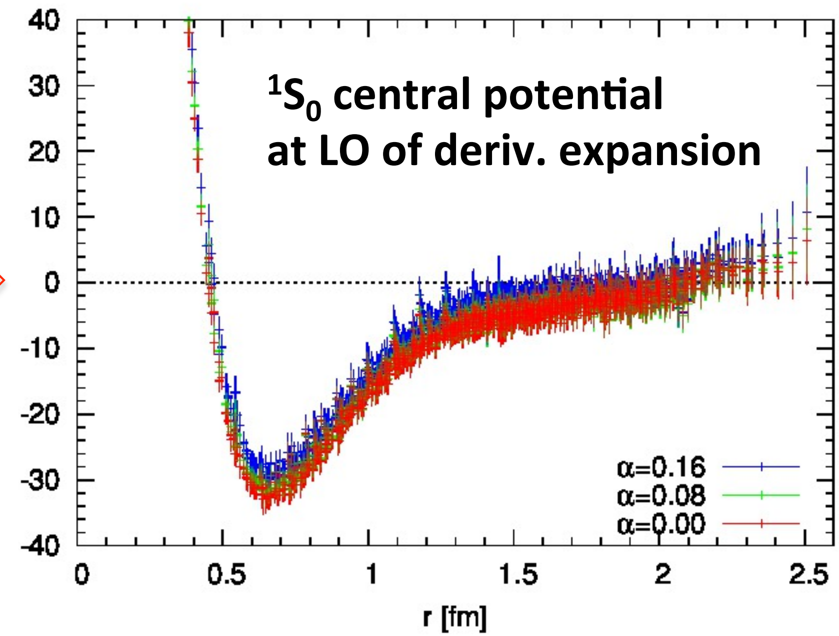
HALQCD 法

◆ 実例：励起状態が混じっていても、ポテンシャルはuniqueに決まる！

$$\langle 0|T[N(\vec{x},t)N(\vec{y},t)\cdot\overline{NN}(t=0;\alpha)]|0\rangle = \sum_n \psi_n(\vec{x}-\vec{y})\cdot a_n(\alpha)\cdot\exp(-E_n t)$$

$$V_{\mathrm{C}}(\vec{x}) = -\frac{H_0 R(t,\vec{x})}{R(t,\vec{x})} - \frac{(\partial/\partial t)R(t,\vec{x})}{R(t,\vec{x})} + \frac{1}{4m_N}\frac{(\partial/\partial t)^2 R(t,\vec{x})}{R(t,\vec{x})}$$





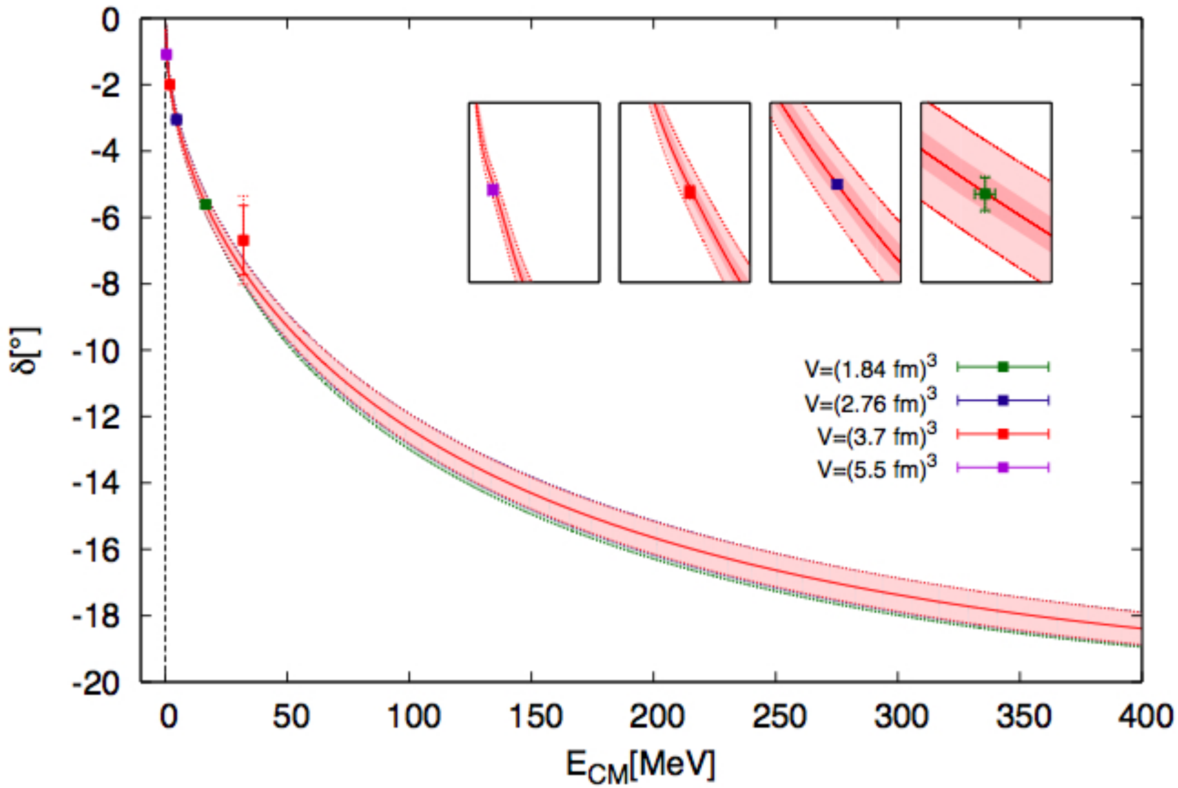
Good agreement !
➔ Our method works !

source 関数：

$$f(x,y,z) = 1 + \alpha\left(\cos(2\pi x/L) + \cos(2\pi y/L) + \cos(2\pi z/L)\right)$$

◆HAL QCD法　と　Luescherの有限体積法の比較

散乱位相差（ππ(I=2) ）



Ns=16,24,32,48,　Nt=128, a=0.115 fm.

m_{pi} = 940 MeV by Quenched QCD

[Kurth et al., JHEP **1312**(2013)015.]

結果は
よく一致している！

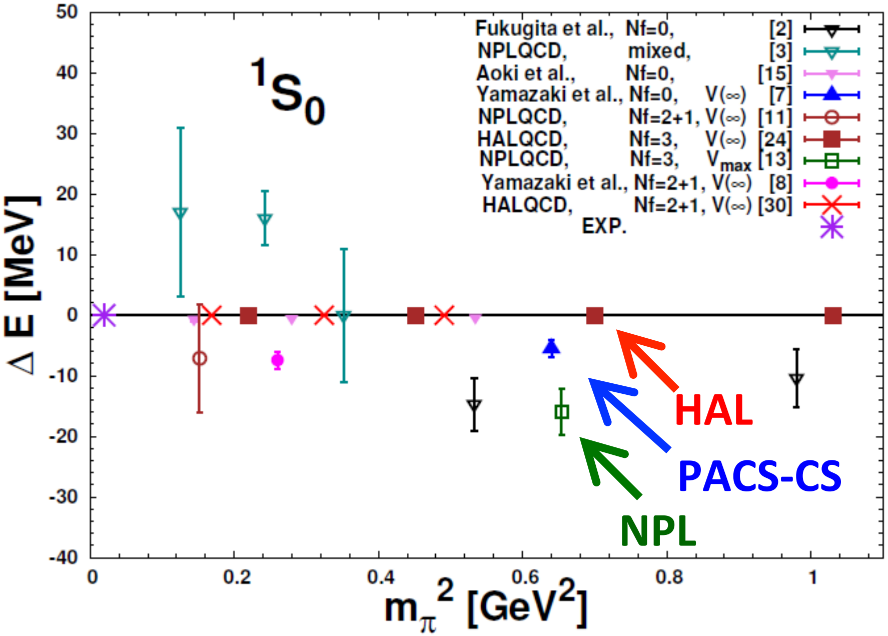
ポテンシャル法と直接法

ポテンシャル法と直接法

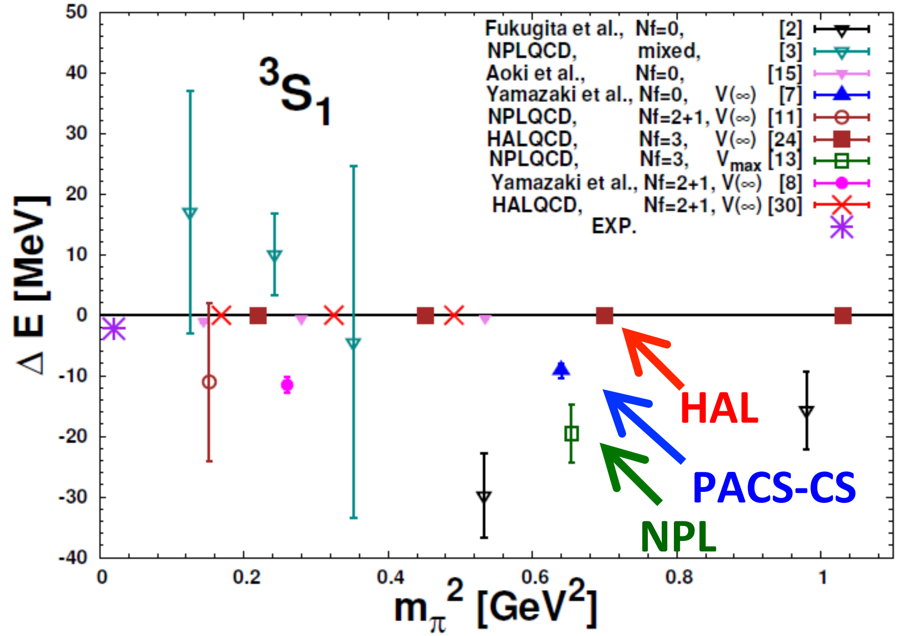
[T.Doi, PoS LAT2012,009]

◆ 重いクォーク領域 NNセクタの、ポテンシャル法 と 直接法 の不一致

“di-neutron”



“deuteron”



◆ **PACS-CS Coll. & NPL QCD Coll.**

- ❖ $^1S_0$ & $^3S_1$ どちらも引力
- ❖ $^1S_0$ & $^3S_1$どちらにも束縛状態あり
- ❖ smearing sourceを採用した
  直接法

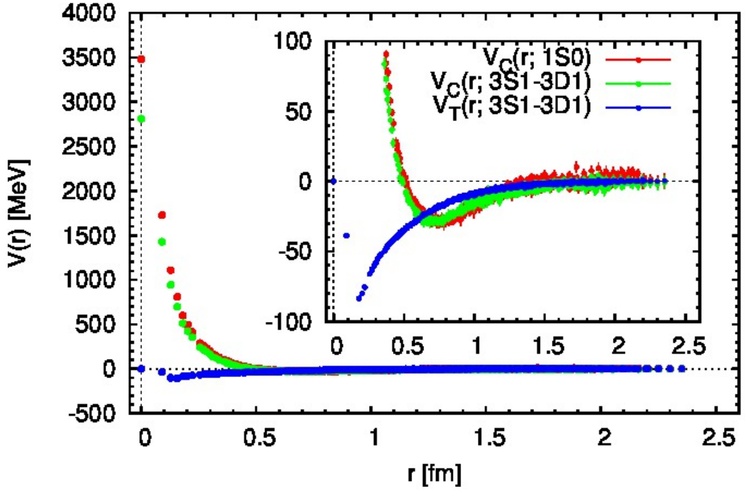
◆ **HAL QCD Coll.**

- ❖ $^1S_0$ & $^3S_1$ どちらも引力
- ❖ $^1S_0$ & $^3S_1$ どちらにも束縛状態なし
- ❖ wall sourceを採用した
  ポテンシャル法

ポテンシャル法と直接法

◆この二つの方法を比較する

☐ ポテンシャル法 (HAL QCD 法)



☐ 直接法

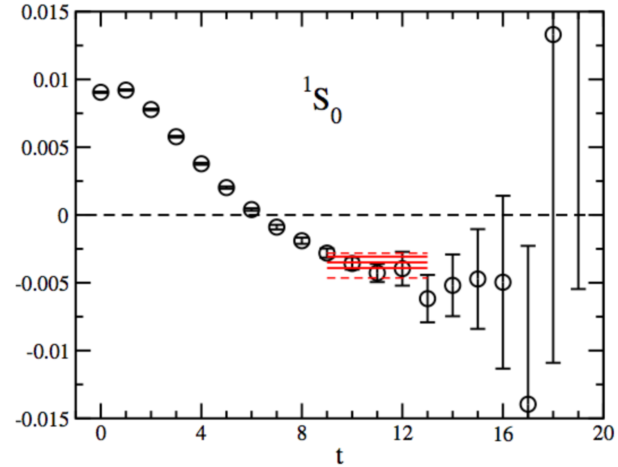


Fig. Yamazaki et al. '15

Yamazaki et al., PRD86,074514; PRD92,014501と全く同じゲージ配位を用いる。

volume	conf.	smared src. meas.	wall src. meas.
$40^3 \times 48$	200	192	48
$48^3 \times 48$	800	256	48
$64^3 \times 64$	327	48	32

Table: Lattice configurations (we mainly use $48^3 \times 48$ volume)

$$m_\pi = 0.51\text{GeV}, m_\text{N} = 1.32\text{GeV}, m_\text{K} = 0.62\text{GeV}, m_\Xi = 1.46\text{GeV}$$

☐ 統計の理由により、ΞΞ channel 採用

ポテンシャル法と直接法

[T.Iritani@LATTICE2015]

◆R-correlator が、比較の鍵を握る

$$R(\vec{r},t) \equiv C_{\Xi\Xi}(\vec{r},t) / C_{\Xi}(t)^2$$

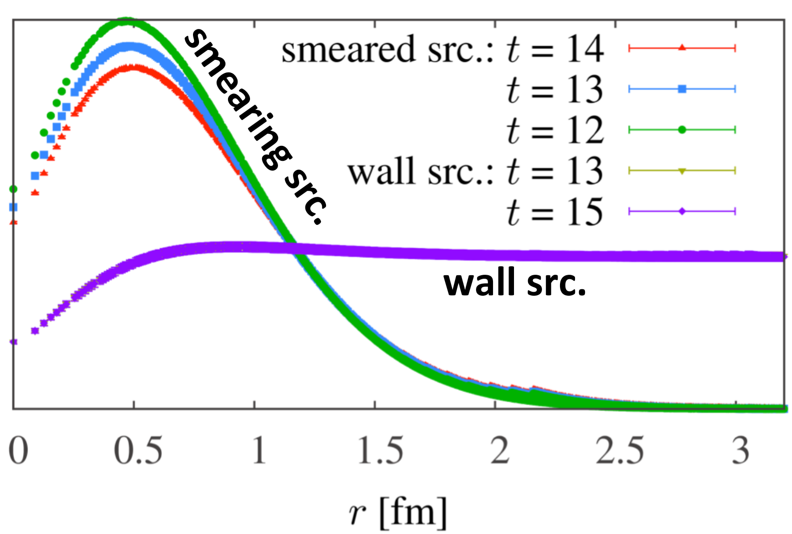
☐ 直接法

$$R(t) \equiv \sum_{\vec{r}} R(\vec{r},t) = \sum_n b_n \exp\left(-\Delta E_n t\right) \Rightarrow \Delta E = E_{\Xi\Xi} - 2m_{\Xi}$$

☐ ポテンシャル法

$$\left(\frac{1}{4m}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} - H_0\right) R(\vec{r},t) = \int d^3r' V(\vec{r},\vec{r}') R(\vec{r}',t)$$

☐ R(r,t): smearing src. ←→ wall src.



◆ smearing source:
t とともに、形が変わる。

◆ wall source:
t 依存性は、ほとんどない。

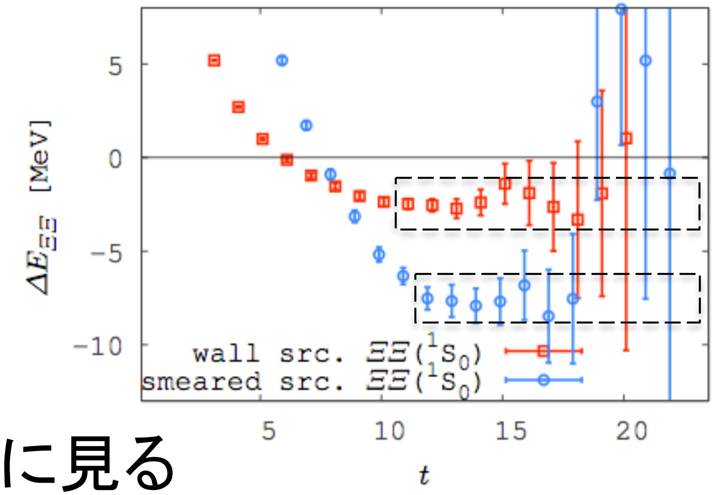
ポテンシャル法と直接法

[T.Iritani@LATTICE2015]

◆**Effective mass plot** (wall src. v.s. smr. src.)

$$R(t) \equiv C_{\Xi\Xi}(t) / C_{\Xi}(t)^2$$

$$\Delta E_{\Xi\Xi} = E_{\Xi\Xi} - 2m_{\Xi}$$

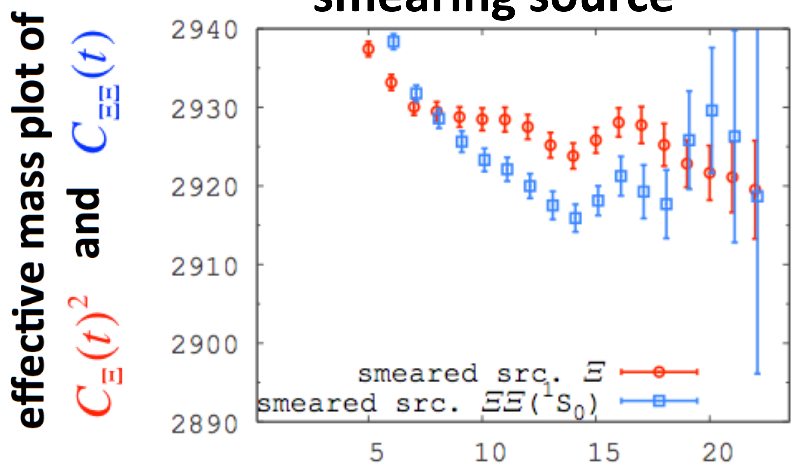


□ **Plateauxが2つ** (sourceに依存)

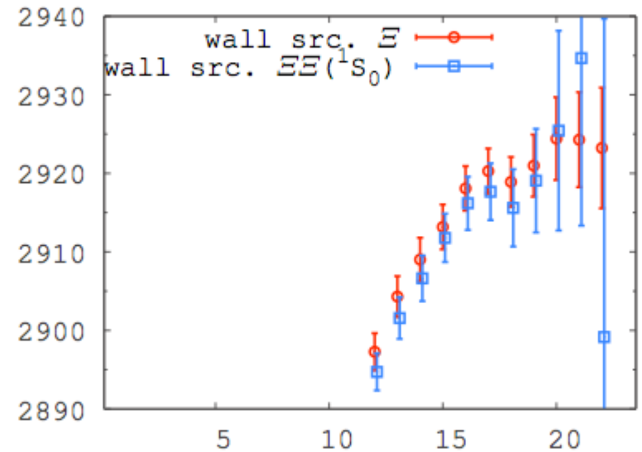
少なくとも、どちらかはfake！
(どちらも fakeの可能性もあり)

□ 分子と分母 ($C_{\Xi\Xi}(t)$ and $C_{\Xi}(t)^2$) を別々に見る

smearing source



wall source



□ どちらも励起状態で汚染されている。

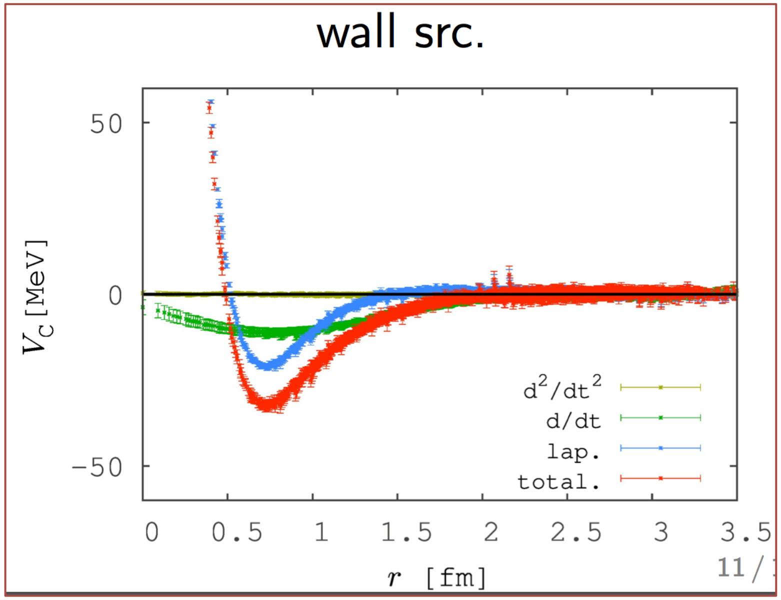
□ これらが分子と分母で相殺して、上の二つの plateau が別の位置に出る。

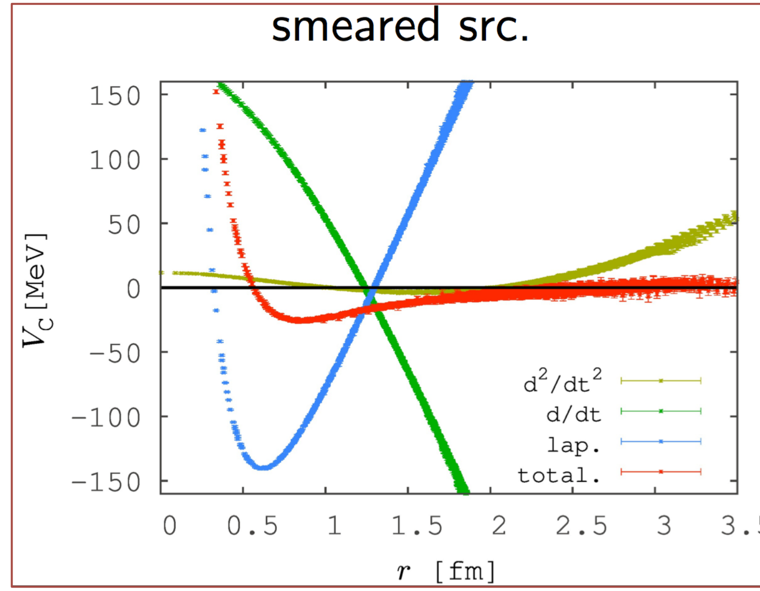
□ **真のground state sat.は、分子と分母の**同時 plateau ➔ **t ≳16** at least

ポテンシャル法と直接法

[T.Iritani@LATTICE2015]

◆ time-dep. 法によるポテンシャル





◆ time-dep. 法がうまく機能している

$$V(\vec{r}) = -\frac{H_0 R(\vec{r},t)}{R(\vec{r},t)} - \frac{(\partial/\partial t)R(\vec{r},t)}{R(\vec{r},t)} + \frac{(\partial/\partial t)^2 R(\vec{r},t)}{4m\,R(\vec{r},t)}$$

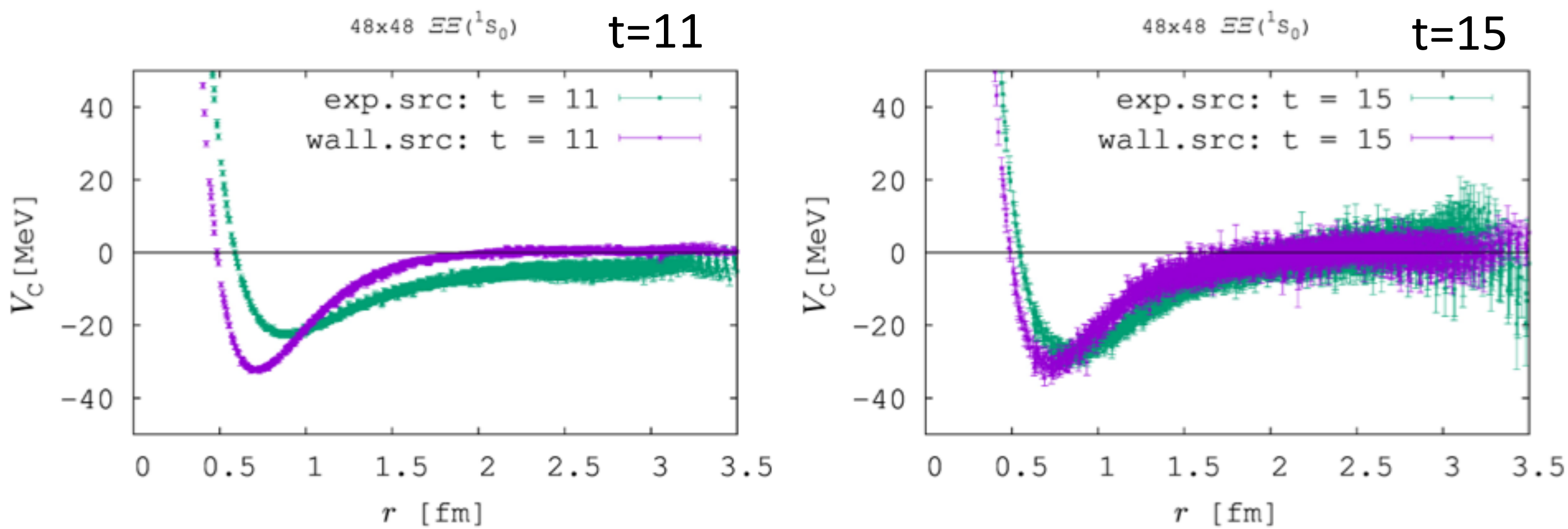
- ☐ **wall src.:**
  三つの項が足し合わさって、**total result**.

- ☐ **smearing src.:**
  三つの項が奇跡的にキャンセルして、**total result**.

ポテンシャル法と直接法

[T.Iritani@LATTICE2015]

◆smearing source と wall source のポテンシャル



- 少し違いがある。

- potential from wall src. ：t 依存性なし
  potential from smearing src. ：t 依存性あり

- t→大で、smearing src. の結果は、wall src. の結果に近づく.

- この違いは、微分展開の NLO によるもの (➔ NEXT SLIDE)

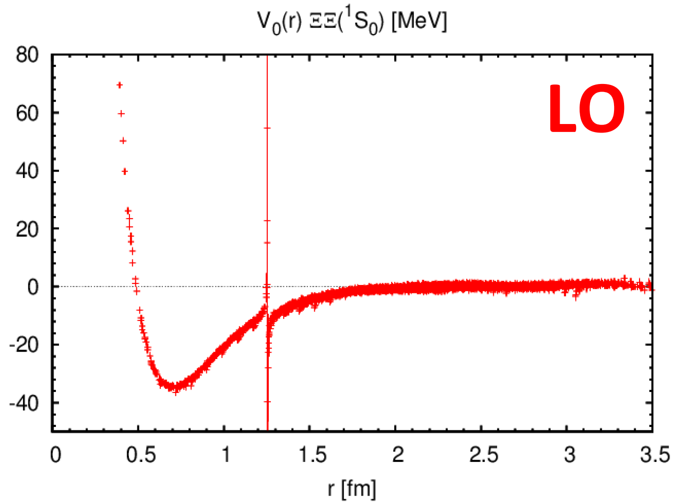
$$U(\vec{r},\vec{r}')=\left(V_0(\vec{r})+V_1(\vec{r})\nabla^2+\cdots\right)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$$

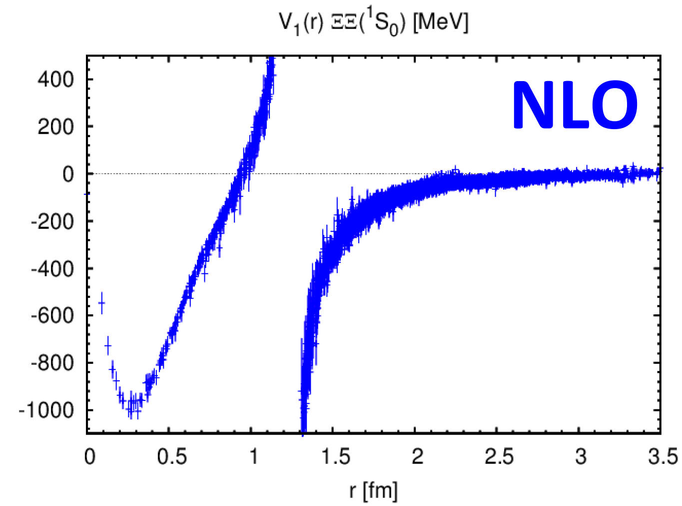
ポテンシャル法と直接法

[T.Iritani]

◆ LOとNLO の分離（ $\mathcal{J}_{\mathrm{wall}}$, $\mathcal{J}_{\mathrm{smear}}$ のデータから）

$$V(\vec{r},\nabla) = V_0(\vec{r}) + V_1(\vec{r})\nabla^2 + \cdots$$

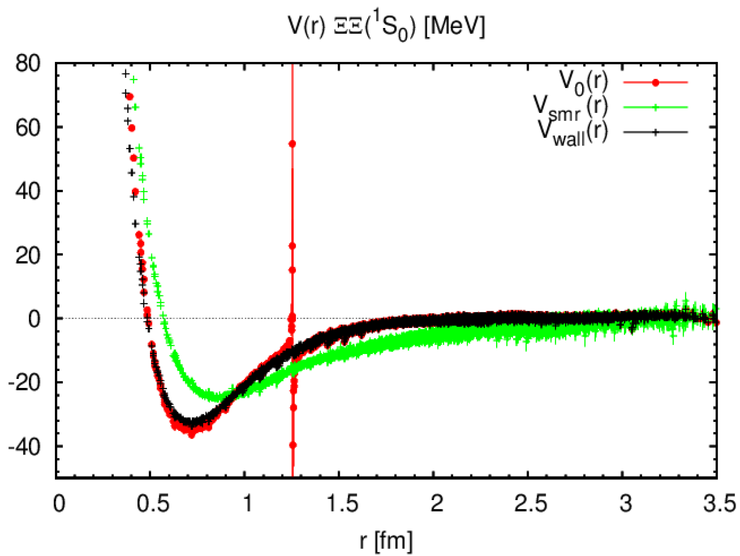




r 〜 1.2 fm 付近の発散は、
技術的問題

ポテンシャル逆解きの際の
条件数がその近傍で発散

◆ 比較： $V_{\mathrm{wall}}(r)$, $V_{\mathrm{LO}}(r)$, $V_{\mathrm{smear}}(r)$



◆ $V_1(r)$ は常に∇^2と共に現れる。
➔ 低エネルギー状態で寄与は小さい。

このため、

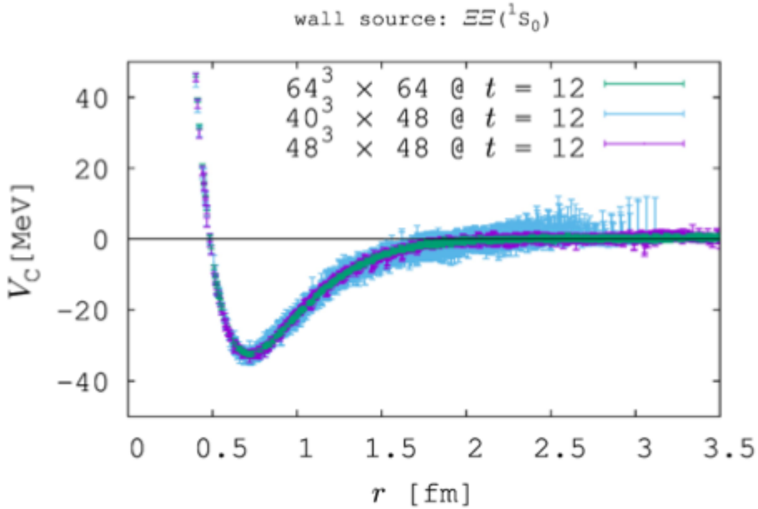
◆ $V_{\mathrm{wall}}(\vec{r}) \simeq V_0(\vec{r})$

$$V_{\mathrm{smear}}(\vec{r}) \to V_{\mathrm{wall}}(\vec{r}) \simeq V_0(\vec{r})$$

as $t \to$ large

ポテンシャル法と直接法

◆“ポテンシャル法” と “直接法” が、consistentである事。

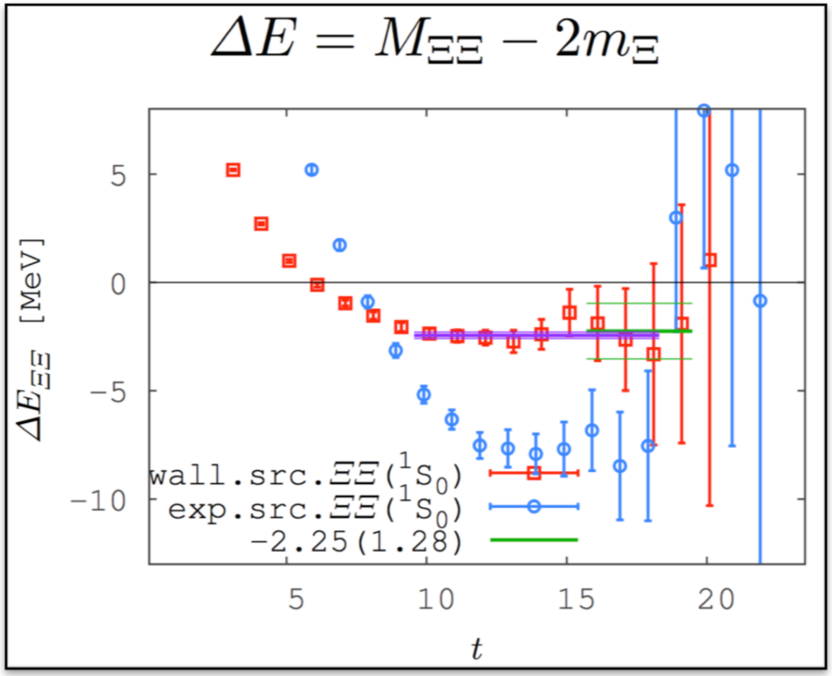


- LQCDで作った potential $V_{\mathrm{C}}^{\Xi\Xi}(\vec{r})$
  ➔ **finite volume Schrödinger eq.**
  ➔ eigen modes.

  [Charron for HAL QCD Coll., arXiv:1312.1032]

- “wall src.” ΔE と consistent な結果

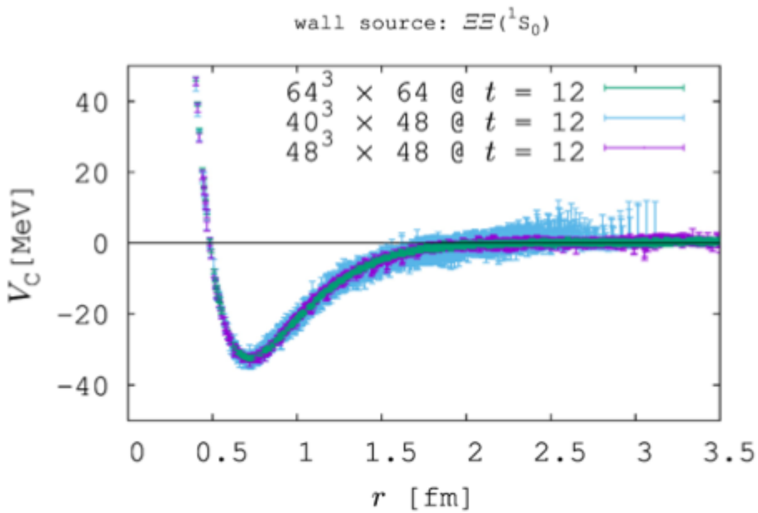
  −2.25(1.28) MeV @ $48^3 \times 48$



ポテンシャル法と直接法

[T.Iritani@LATTICE2015]

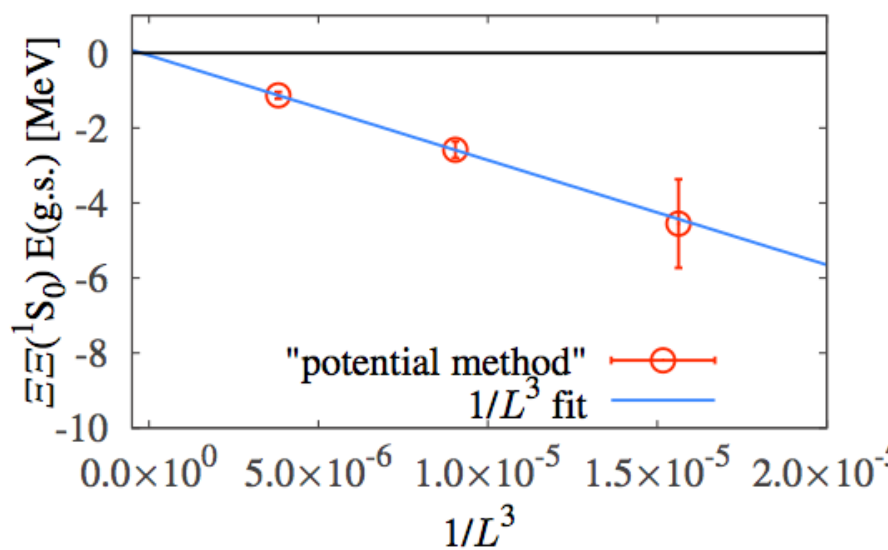
◆"ポテンシャル法" と "直接法" が、consistentである事。



☐Volume extrapolation ➔ **no bound state.**

energy eigenvalues

vol.	E(g.s.) [MeV]	E(1st) [MeV]
40^3	$-4.55(1.18)$	$75.63(1.31)$
48^3	$-2.58(22)$	$52.87(33)$
64^3	$-1.13(9)$	$28.71(9)$



Large t 領域での（期待される）振舞

Large t 領域での振舞

[T.Iritani]

◆LO ポテンシャルを使った有限体積の Schrödinger eq.

（We use $V_{\mathrm{wall}}(\vec{r}) \simeq V_0(\vec{r})$）

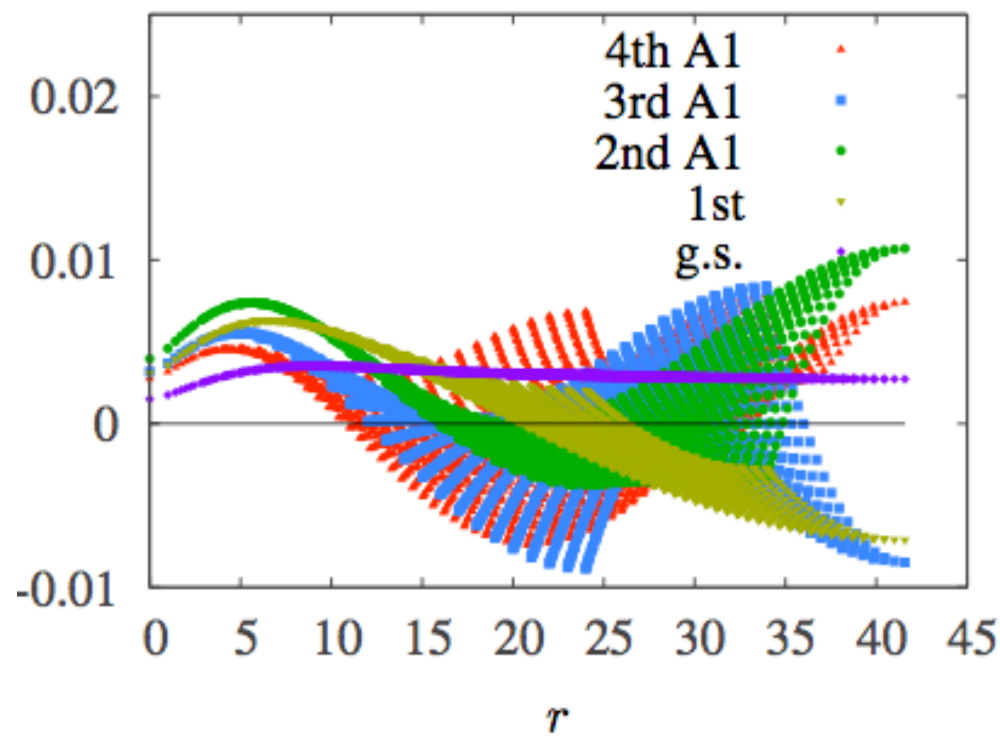
➔

Energies and NBS波動関数

ΔE_n $\psi_n(\vec{x})$

n-th A1	ΔE_n [MeV]
0	-2.58(1)
1	52.49(2)
2	112.08(2)
3	169.78(2)
4	224.73(1)

Table: $48^3 \times 48$ wall source @ $t = 12$



Large t 領域での振舞

◆ R-correlator のスペクトル分解

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\mathrm{wall}},\quad \mathcal{J}_{\mathrm{exp}}$$

[T.Iritani]

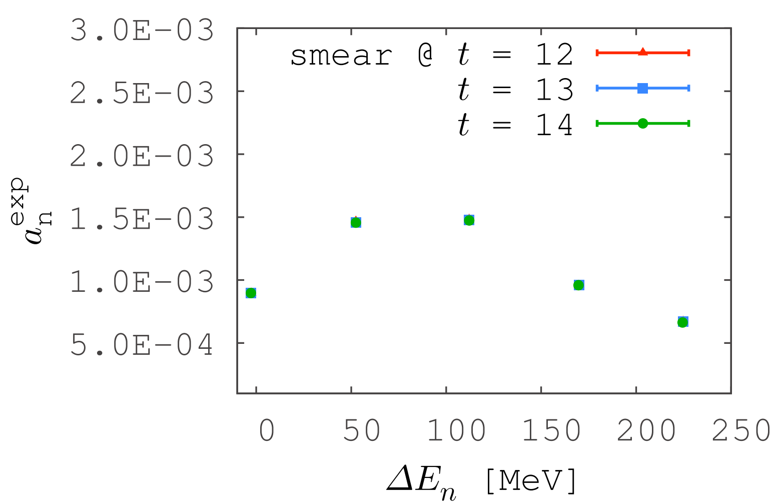
$$R(\vec{x},t;\mathcal{J}) = \sum_n a_n(\mathcal{J}) \cdot \psi_n(\vec{x}) \exp\left(-\Delta E_n t\right)$$

with

$\bar{\psi}_n(\vec{x})$: left eig. vec. of $\hat{H}$

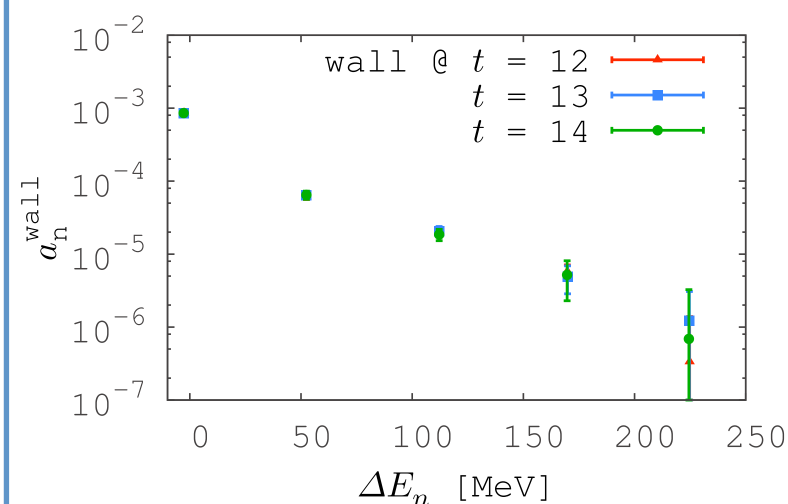
$$a_n(\mathcal{J}) \equiv \exp\left(\Delta E_n t\right) \sum_{\vec{x}} \bar{\psi}_n(\vec{x}) R(\vec{x},t;\mathcal{J})$$

◆ smearing source



◆ Main contribution
複数の励起状態から

◆ Wall source



◆ Main contribution
基底状態から

❖ a_n の t 依存性が小さい ➔ decompositionがうまくいっている

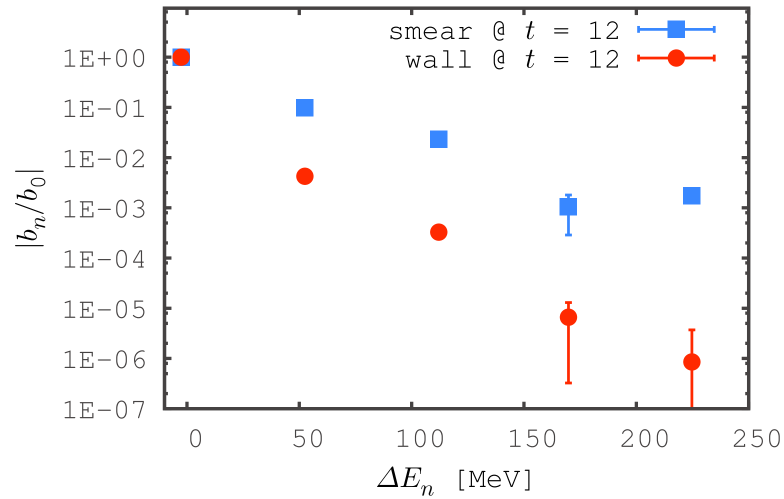
Large t 領域での振舞

[T.Iritani]

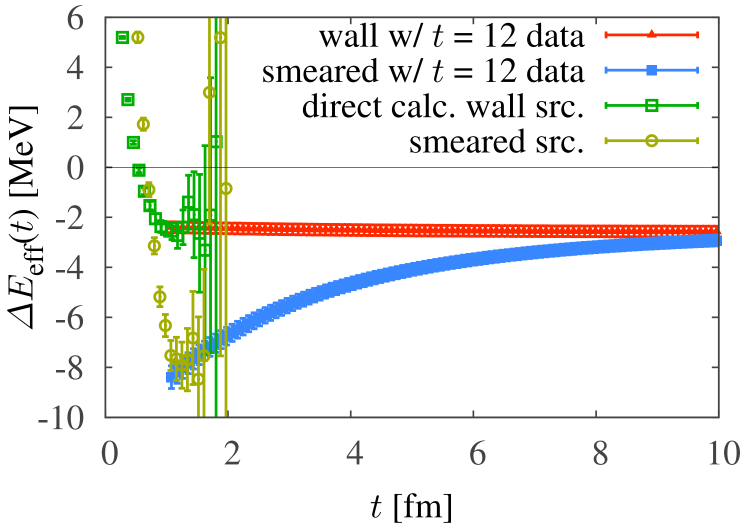
◆直接法の R(t) を再構成

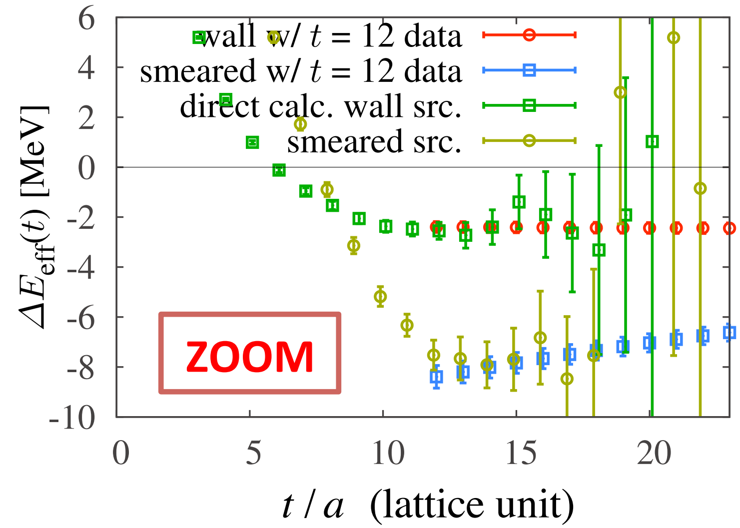
$$R(t;\mathcal{J}) = \sum_{\vec{x}} R(\vec{x},t;\mathcal{J}) = \sum_{n} b_n(\mathcal{J}) \exp\left(-\Delta E_n t\right)$$

$$b_n(\mathcal{J}) \equiv a_n(\mathcal{J}) \sum_{\vec{x}} \psi_n(\vec{x})$$



◆Large t 領域のEffective energy plot (再構成されたR(t)から)



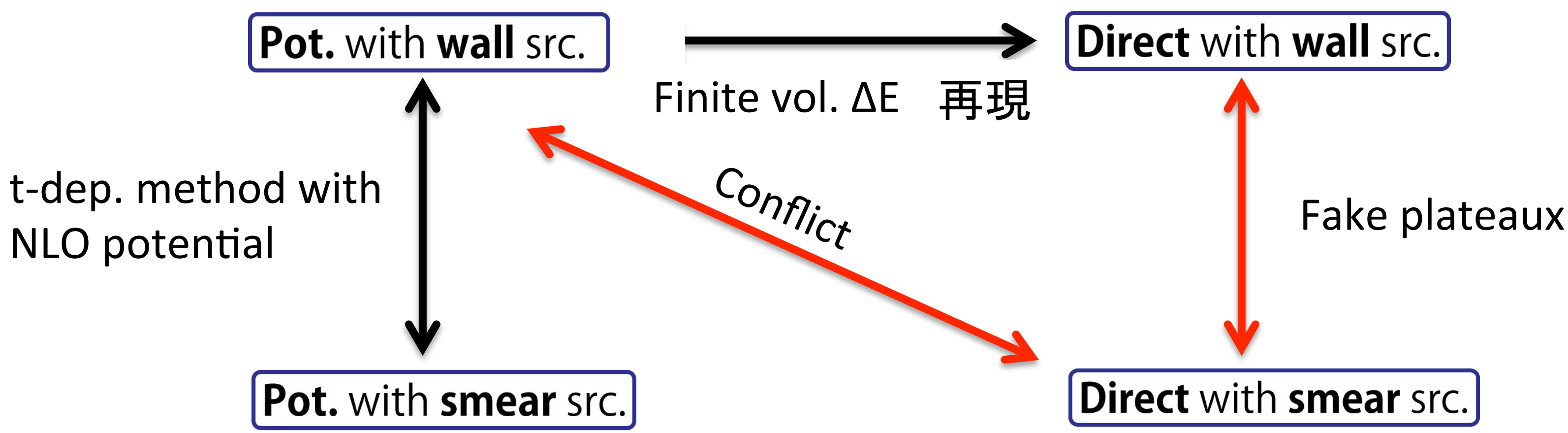


まとめ

◆ multi-nucleon系では、**plateauの同定に細心の注意**が必要。

- 多くの cancellationが伴っていて、fake plataux が出やすい。
- （ポテンシャル法の**time-dep. 法**のような）特別なテクニックを開発すべきである。

◆ **“ポテンシャル法” と “直接法” は consistent である。**



◆結果が不一致だった事の本当の原因は、
「**smearing srcを採用した直接法はsystematic uncertaintyが大きい**」

➔ この場合、結果のチェックを入念に行う必要がある。
- ❖ 他の方法による結果との比較
- ❖ 他のsource　の結果との比較

This applies to　(i) Yamazaki et al.　&　(ii) NPL QCD

backup

HALQCD method

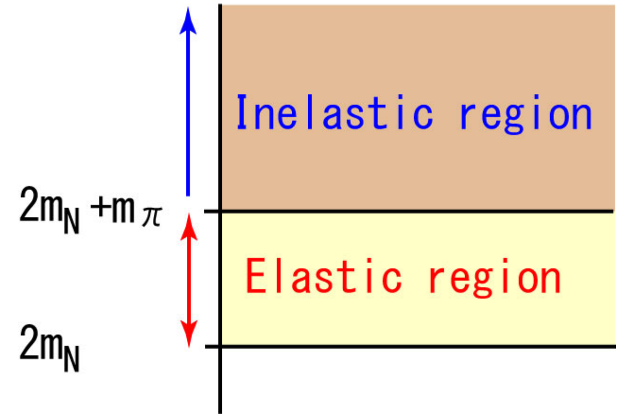
◆Proof of existence of E-indep. U(r,r')

◆Assumption:

Linear indep. of NBS wave func's for E < Eth.

➔ Dual basis exists

$$\int d^3r\, \tilde{\psi}_{\vec{k}'}(\vec{r})\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = (2\pi)^3\delta^3(\vec{k}'-\vec{k})$$



◆Proof:

$$K_{\vec{k}}(\vec{r}) \equiv \left(k^2/m_N - H_0\right)\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$$

$$K_{\vec{k}}(\vec{r}) = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} K_{\vec{k}'}(\vec{r}) \int d^3r'\, \tilde{\psi}_{\vec{k}'}(\vec{r})\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$$

$$= \int d^3r' \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} K_{\vec{k}'}(\vec{r})\tilde{\psi}_{\vec{k}'}(\vec{r}') \right\} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}')$$

$$\left(k^2/m_N - H_0\right)\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \int d^3r'\, U(\vec{r},\vec{r}')\psi_{\vec{k}}(\vec{r}')$$

$$U(\vec{r},\vec{r}') \equiv \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} K_{\vec{k}'}(\vec{r})\tilde{\psi}_{\vec{k}'}(\vec{r})$$

U(r,r') does not depend on E
because of the integration of k'.

HAL QCD method

[Murano et al., PTP125(2011)1225]

◆ General nonlocal potential is incovenient ➔ **derivative expansion**:

$$V(\vec{r},\vec{\nabla}) \equiv V_C(r) + \underbrace{V_{ll}(r)\vec{L}^2 + \{V_{pp}(r),\nabla^2\}}_{O(\nabla^2)\text{ term}} + O(\nabla^4)$$

◆ The **convergence of deriv.exp.** is found to be **good** !

[Strategy to check]

SKIP

☐ We define

$$V_C(\vec{r};E) \equiv E - \frac{H_0\psi_E(\vec{r})}{\psi_E(\vec{r})}$$

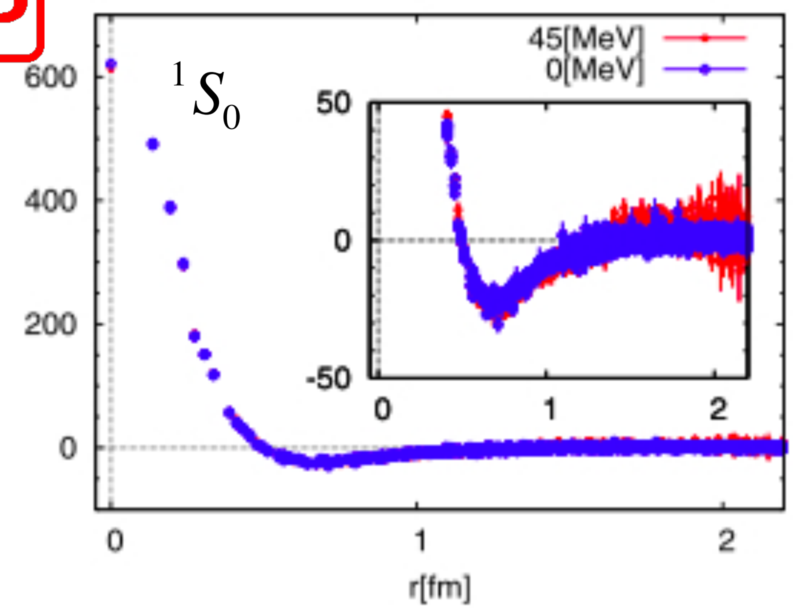
☐ If $V_C(r;E)$ agrees in the region $E_0 < E < E_1$

(1) We can identify

$$V_C(\vec{r}) = V_C(\vec{r};E)$$

(2) $O(\nabla^2)$-term is small

$$V(\vec{r},\vec{\nabla}) = V_C(r) + \cancel{O(\nabla^2)}$$



good agreement ! ➔ good convergence

Comment: The current result is obtained based on an older method.
The result should be replaced by the new method. “time-dependent” Schrodinger-like eq.