

# Yang-Mills gradient flow による格子上のエネルギー運動量テンソル

鈴木 博

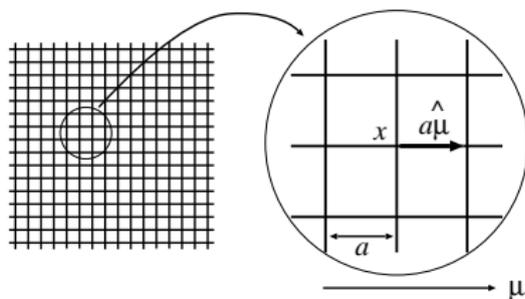
理研  $\Rightarrow$  九州大学

2013/09/27 「離散的手法による場と時空のダイナミクス」研究会 @ KEK

- H.S., Prog. Theor. Exp. Phys. (2013) 083B03 [arXiv:1304.0533 [hep-lat]].
- H.S., work in progress

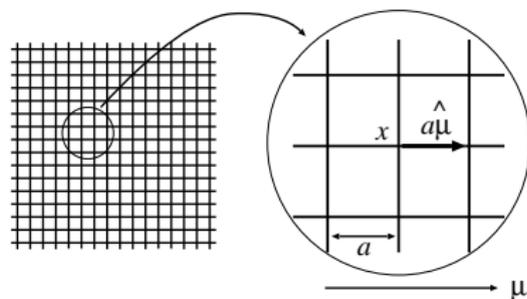
# 格子場の理論とエネルギー運動量テンソル (EMT)

- 格子場の理論



# 格子場の理論とエネルギー運動量テンソル (EMT)

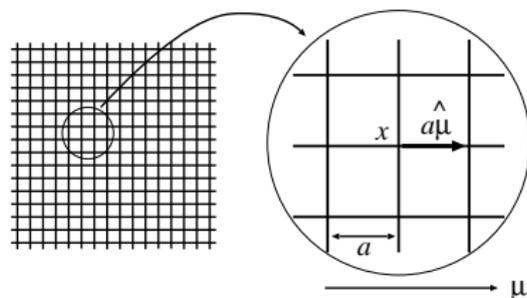
- 格子場の理論



- 最も成功している場の理論の非摂動的定式化。特に内部ゲージ対称性を厳密に保つ

# 格子場の理論とエネルギー運動量テンソル (EMT)

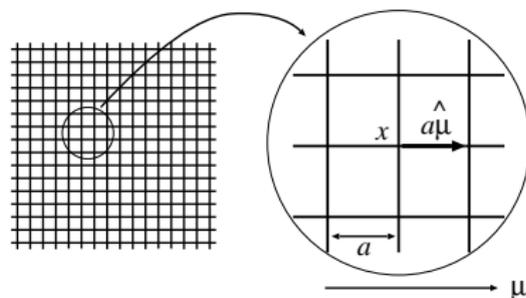
- 格子場の理論



- 最も成功している場の理論の非摂動的定式化。特に内部ゲージ対称性を厳密に保つ
- しかし、時空対称性（並進、回転、SUSY、コンフォーマル、...）とは大変相性が悪い

# 格子場の理論とエネルギー運動量テンソル (EMT)

- 格子場の理論

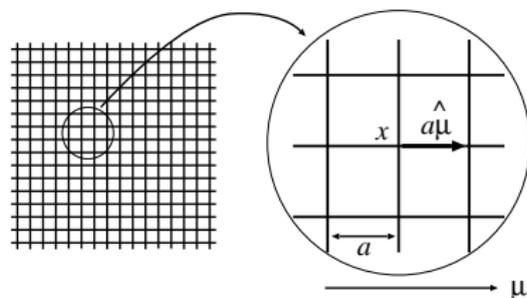


- 最も成功している場の理論の非摂動的定式化。特に内部ゲージ対称性を厳密に保つ
- しかし、時空対称性（並進、回転、SUSY、コンフォーマル、...）とは大変相性が悪い
- 並進対称性に付随した Ward–Takahashi (WT) 関係式 ( $T_{\mu\nu}(x)$ : エネルギー運動量テンソル (EMT))

$$\langle \partial_\mu T_{\mu\nu}(x) \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \cdots \rangle = -\delta(x-y) \langle \partial_\nu \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \cdots \rangle + \cdots$$

# 格子場の理論とエネルギー運動量テンソル (EMT)

- 格子場の理論



- 最も成功している場の理論の非摂動的定式化。特に内部ゲージ対称性を厳密に保つ
- しかし、時空対称性（並進、回転、SUSY、コンフォーマル、...）とは大変相性が悪い
- 並進対称性に付随した Ward–Takahashi (WT) 関係式 ( $T_{\mu\nu}(x)$ : エネルギー運動量テンソル (EMT))

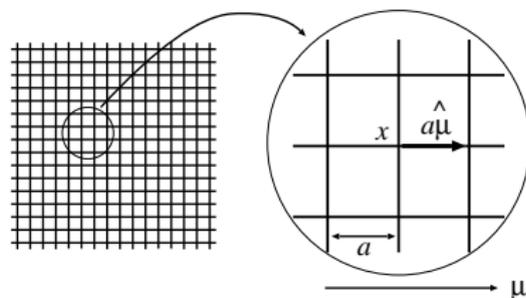
$$\langle \partial_\mu T_{\mu\nu}(x) \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \cdots \rangle = -\delta(x-y) \langle \partial_\nu \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \cdots \rangle + \cdots$$

- 保存則はこの特別な場合

$$\langle \partial_\mu T_{\mu\nu}(x) \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \cdots \rangle = 0, \quad \text{for } x \neq y, x \neq z, \dots$$

# 格子場の理論とエネルギー運動量テンソル (EMT)

- 格子場の理論



- 最も成功している場の理論の非摂動的定式化。特に内部ゲージ対称性を厳密に保つ
- しかし、時空対称性（並進、回転、SUSY、コンフォーマル、...）とは大変相性が悪い
- 並進対称性に付随した Ward–Takahashi (WT) 関係式 ( $T_{\mu\nu}(x)$ : エネルギー運動量テンソル (EMT))

$$\langle \partial_\mu T_{\mu\nu}(x) \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \cdots \rangle = -\delta(x-y) \langle \partial_\nu \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \cdots \rangle + \cdots$$

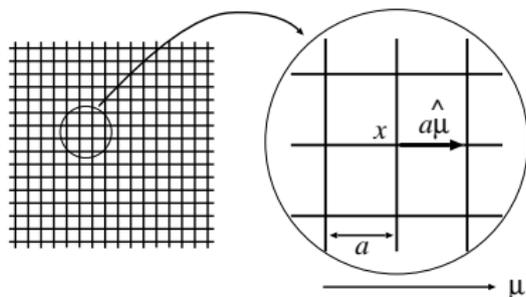
- 保存則はこの特別な場合

$$\langle \partial_\mu T_{\mu\nu}(x) \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \cdots \rangle = 0, \quad \text{for } x \neq y, x \neq z, \dots$$

- 連続極限  $a \rightarrow 0$  でこれらの関係式を満たすような格子上の EMT が作れるだろうか？

# 格子場の理論とエネルギー運動量テンソル (EMT)

- 格子場の理論



- 最も成功している場の理論の非摂動的定式化。特に内部ゲージ対称性を厳密に保つ
- しかし、時空対称性（並進、回転、SUSY、コンフォーマル、...）とは大変相性が悪い
- 並進対称性に付随した Ward–Takahashi (WT) 関係式 ( $T_{\mu\nu}(x)$ : エネルギー運動量テンソル (EMT))

$$\langle \partial_\mu T_{\mu\nu}(x) \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \cdots \rangle = -\delta(x-y) \langle \partial_\nu \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \cdots \rangle + \cdots$$

- 保存則はこの特別な場合

$$\langle \partial_\mu T_{\mu\nu}(x) \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \cdots \rangle = 0, \quad \text{for } x \neq y, x \neq z, \dots$$

- 連続極限  $a \rightarrow 0$  でこれらの関係式を満たすような格子上の EMT が作れるだろうか？
- もし可能であれば、その応用は広範であろう（熱力学量、粘性係数、共型場の理論、ディラトンの物理、真空のエネルギー、...）

素朴な構成ではうまくいかない...

- pure Yang–Mills 理論の EMT に対する素朴な表式

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{g_0^2} \left[ F_{\mu\rho}^a(x) F_{\nu\rho}^a(x) - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x) \right]$$

- pure Yang–Mills 理論の EMT に対する素朴な表式

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{g_0^2} \left[ F_{\mu\rho}^a(x) F_{\nu\rho}^a(x) - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x) \right]$$

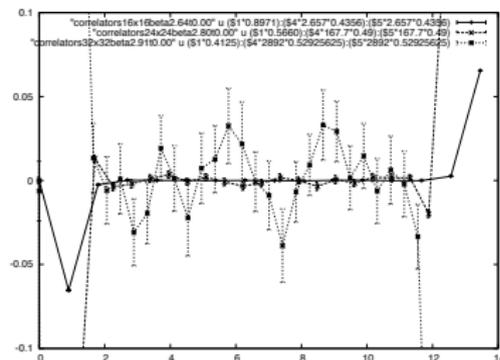
- 期待される WT 関係式の例： $\langle \partial_\mu T_{\mu 1}(x) T_{01}(0) \rangle = C \partial_0 \delta(x)$

# 素朴な構成ではうまくいかない...

- pure Yang–Mills 理論の EMT に対する素朴な表式

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{g_0^2} \left[ F_{\mu\rho}^a(x) F_{\nu\rho}^a(x) - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x) \right]$$

- 期待される WT 関係式の例： $\langle \partial_\mu T_{\mu 1}(x) T_{01}(0) \rangle = C \partial_0 \delta(x)$
- 左辺を実際に数値計算してみると ( $x = (x_0, 0, 0, 0)$ )

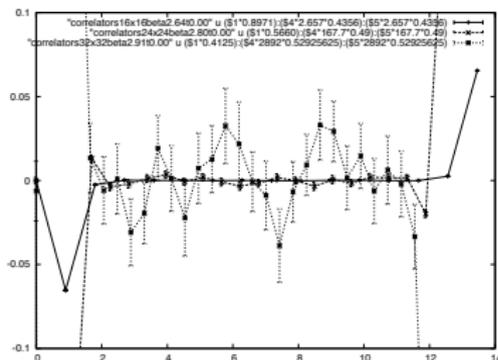


# 素朴な構成ではうまくいかない...

- pure Yang–Mills 理論の EMT に対する素朴な表式

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{g_0^2} \left[ F_{\mu\rho}^a(x) F_{\nu\rho}^a(x) - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x) \right]$$

- 期待される WT 関係式の例： $\langle \partial_\mu T_{\mu 1}(x) T_{01}(0) \rangle = C \partial_0 \delta(x)$
- 左辺を実際に数値計算してみると ( $x = (x_0, 0, 0, 0)$ )



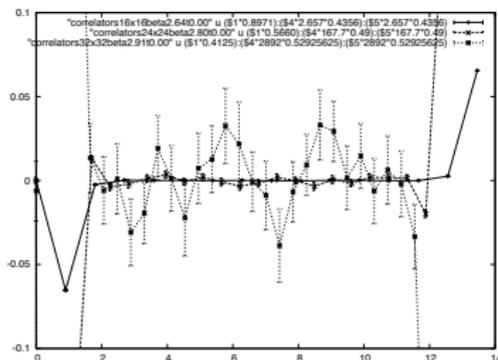
- 非常に noisy

# 素朴な構成ではうまくいかない...

- pure Yang–Mills 理論の EMT に対する素朴な表式

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{g_0^2} \left[ F_{\mu\rho}^a(x) F_{\nu\rho}^a(x) - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x) \right]$$

- 期待される WT 関係式の例： $\langle \partial_\mu T_{\mu 1}(x) T_{01}(0) \rangle = C \partial_0 \delta(x)$
- 左辺を実際に数値計算してみると  $(x = (x_0, 0, 0, 0))$

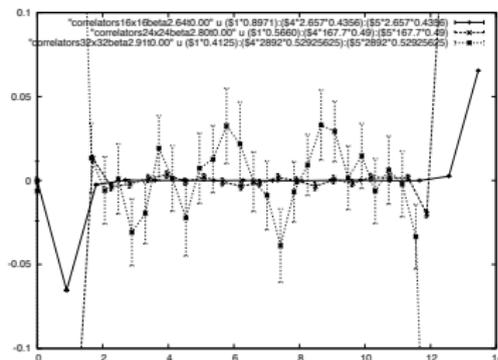


- 非常に noisy
- (0 と consistent ではあるが)  $a \rightarrow 0$  で発散して行くように見える

- pure Yang–Mills 理論の EMT に対する素朴な表式

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{g_0^2} \left[ F_{\mu\rho}^a(x) F_{\nu\rho}^a(x) - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x) \right]$$

- 期待される WT 関係式の例： $\langle \partial_\mu T_{\mu 1}(x) T_{01}(0) \rangle = C \partial_0 \delta(x)$
- 左辺を実際に数値計算してみると ( $x = (x_0, 0, 0, 0)$ )



- 非常に noisy
- (0 と consistent ではあるが)  $a \rightarrow 0$  で発散して行くように見える
- そもそも、格子作用が並進対称性を壊しているため、素朴な表式が保存する保証は全くない



- なんとか工夫して、格子定式化が欲しい対称性（今の場合、並進）の元で不変になるようにする（Ginsparg–Wilson 関係式に基づいた格子カイラル対称性のように）

- なんとか工夫して、格子定式化が欲しい対称性（今の場合、並進）の元で不変になるようにする（Ginsparg–Wilson 関係式に基づいた格子カイラル対称性のように）
- これは理想的だが、時空対称性に関しては難しそうだ... (結局のところ SLAC derivative?)

- なんとか工夫して、格子定式化が欲しい対称性（今の場合、並進）の元で不変になるようにする（Ginsparg–Wilson 関係式に基づいた格子カイラル対称性のように）
- これは理想的だが、時空対称性に関しては難しそうだ... (結局のところ SLAC derivative?)
- 一般論の言うところは、lattice symmetry と consistent な次元 4 の演算子の線形結合

$$T_{\mu\nu}(x) = C_1 \left( \sum_{\rho} F_{\mu\rho}^a F_{\nu\rho}^a - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \sum_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}^a F_{\rho\sigma}^a \right) + C_2 \delta_{\mu\nu} \sum_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}^a F_{\rho\sigma}^a + C_3 \delta_{\mu\nu} \sum_{\rho} F_{\mu\rho}^a F_{\nu\rho}^a$$

が連続極限で保存する。そこでこれらの係数の比を保存則から決めてやればよい（だろう）  
(Caracciolo et al. (1989))

- なんとか工夫して、格子定式化が欲しい対称性（今の場合、並進）の元で不変になるようにする（Ginsparg–Wilson 関係式に基づいた格子カイラル対称性のように）
- これは理想的だが、時空対称性に関しては難しそうだ... (結局のところ SLAC derivative?)
- 一般論の言うところは、lattice symmetry と consistent な次元 4 の演算子の線形結合

$$T_{\mu\nu}(x) = C_1 \left( \sum_{\rho} F_{\mu\rho}^a F_{\nu\rho}^a - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \sum_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}^a F_{\rho\sigma}^a \right) + C_2 \delta_{\mu\nu} \sum_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}^a F_{\rho\sigma}^a + C_3 \delta_{\mu\nu} \sum_{\rho} F_{\mu\rho}^a F_{\nu\rho}^a$$

が連続極限で保存する。そこでこれらの係数の比を保存則から決めてやればよい（だろう）(Caracciolo et al. (1989))

- 全体の規格化は別個に決める（一粒子状態での期待値?、カレント代数?）

- なんとか工夫して、格子定式化が欲しい対称性（今の場合、並進）の元で不変になるようにする（Ginsparg–Wilson 関係式に基づいた格子カイラル対称性のように）
- これは理想的だが、時空対称性に関しては難しそうだ... (結局のところ SLAC derivative?)
- 一般論の言うところは、lattice symmetry と consistent な次元 4 の演算子の線形結合

$$T_{\mu\nu}(x) = C_1 \left( \sum_{\rho} F_{\mu\rho}^a F_{\nu\rho}^a - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \sum_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}^a F_{\rho\sigma}^a \right) + C_2 \delta_{\mu\nu} \sum_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}^a F_{\rho\sigma}^a + C_3 \delta_{\mu\nu} \sum_{\rho} F_{\mu\rho}^a F_{\nu\rho}^a$$

が連続極限で保存する。そこでこれらの係数の比を保存則から決めてやればよい（だろう）  
(Caracciolo et al. (1989))

- 全体の規格化は別個に決める（一粒子状態での期待値?、カレント代数?）
- また、複合演算子に対して正しい並進を生成するかどうかは別途議論する必要がある（まだ誰も議論していない!）

- なんとか工夫して、格子定式化が欲しい対称性（今の場合、並進）の元で不変になるようにする（Ginsparg–Wilson 関係式に基づいた格子カイラル対称性のように）
- これは理想的だが、時空対称性に関しては難しそうだ... (結局のところ SLAC derivative?)
- 一般論の言うところは、lattice symmetry と consistent な次元 4 の演算子の線形結合

$$T_{\mu\nu}(x) = C_1 \left( \sum_{\rho} F_{\mu\rho}^a F_{\nu\rho}^a - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \sum_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}^a F_{\rho\sigma}^a \right) + C_2 \delta_{\mu\nu} \sum_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}^a F_{\rho\sigma}^a + C_3 \delta_{\mu\nu} \sum_{\rho} F_{\mu\rho}^a F_{\nu\rho}^a$$

が連続極限で保存する。そこでこれらの係数の比を保存則から決めてやればよい（だろう）  
(Caracciolo et al. (1989))

- 全体の規格化は別個に決める（一粒子状態での期待値?、カレント代数?）
- また、複合演算子に対して正しい並進を生成するかどうかは別途議論する必要がある（まだ誰も議論していない!）
- 関連して、SUSY 代数、Ferrara–Zumino 超多重項に基づくアプローチ (H.S. (2012))

- 並進不変な正則化における EMT と関係付けられる、ある UV 有限な量を用いる

- 並進不変な正則化における EMT と関係付けられる、ある UV 有限な量を用いる
- そうした UV 有限な量は、どんな正則化（例えば格子正則化）で計算しても答えは同じ

- 並進不変な正則化における EMT と関係付けられる、ある UV 有限な量を用いる
- そうした UV 有限な量は、どんな正則化（例えば格子正則化）で計算しても答えは同じ
- この UV 有限な量を定義するのに、ここではいわゆる Yang–Mills gradient flow というものに注目する

- 並進不変な正則化における EMT と関係付けられる、ある UV 有限な量を用いる
- そうした UV 有限な量は、どんな正則化（例えば格子正則化）で計算しても答えは同じ
- この UV 有限な量を定義するのに、ここではいわゆる Yang–Mills gradient flow というものに注目する
- Yang–Mills gradient flow (仮想時間  $t \in \mathbb{R}$  に関する一種の拡散方程式)

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) = \Delta B_\mu(t, x) + \dots, \quad B_\mu(t=0, x) = A_\mu(x),$$

ここで  $G_{\mu\nu}$  は flowed field の field strength

$$G_{\mu\nu}(t, x) = \partial_\mu B_\nu(t, x) - \partial_\nu B_\mu(t, x) + [B_\mu(t, x), B_\nu(t, x)], \quad D_\mu = \partial_\mu + [B_\mu, \cdot]$$

- 並進不変な正則化における EMT と関係付けられる、ある UV 有限な量を用いる
- そうした UV 有限な量は、どんな正則化（例えば格子正則化）で計算しても答えは同じ
- この UV 有限な量を定義するのに、ここではいわゆる Yang–Mills gradient flow というものに注目する
- Yang–Mills gradient flow (仮想時間  $t \in \mathbb{R}$  に関する一種の拡散方程式)

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) = \Delta B_\mu(t, x) + \dots, \quad B_\mu(t=0, x) = A_\mu(x),$$

ここで  $G_{\mu\nu}$  は flowed field の field strength

$$G_{\mu\nu}(t, x) = \partial_\mu B_\nu(t, x) - \partial_\nu B_\mu(t, x) + [B_\mu(t, x), B_\nu(t, x)], \quad D_\mu = \partial_\mu + [B_\mu, \cdot]$$

- 仮想時間  $t$  の次元が  $-2$  であることに注意

# Yang–Mills gradient flow (もしくは格子ゲージ理論の context では Wilson flow)

- Yang–Mills gradient flow (連続理論)

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) = \Delta B_\mu(t, x) + \dots, \quad B_\mu(t=0, x) = A_\mu(x)$$

# Yang–Mills gradient flow (もしくは格子ゲージ理論の context では Wilson flow)

- Yang–Mills gradient flow (連続理論)

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) = \Delta B_\mu(t, x) + \dots, \quad B_\mu(t=0, x) = A_\mu(x)$$

- Wilson flow (格子理論)

$$\partial_t V(t, x, \mu) V(t, x, \mu)^{-1} = -g_0^2 \partial S_{\text{Wilson}}, \quad V(t=0, x, \mu) = U(x, \mu)$$

# Yang–Mills gradient flow (もしくは格子ゲージ理論の context では Wilson flow)

- Yang–Mills gradient flow (連続理論)

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) = \Delta B_\mu(t, x) + \dots, \quad B_\mu(t=0, x) = A_\mu(x)$$

- Wilson flow (格子理論)

$$\partial_t V(t, x, \mu) V(t, x, \mu)^{-1} = -g_0^2 \partial S_{\text{Wilson}}, \quad V(t=0, x, \mu) = U(x, \mu)$$

- 動機 (Lüscher)

# Yang–Mills gradient flow (もしくは格子ゲージ理論の context では Wilson flow)

- Yang–Mills gradient flow (連続理論)

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) = \Delta B_\mu(t, x) + \dots, \quad B_\mu(t=0, x) = A_\mu(x)$$

- Wilson flow (格子理論)

$$\partial_t V(t, x, \mu) V(t, x, \mu)^{-1} = -g_0^2 \partial S_{\text{Wilson}}, \quad V(t=0, x, \mu) = U(x, \mu)$$

- 動機 (Lüscher)

- 格子 QCD シミュレーションにおける critical slowing down の回避 ( $t < 0$  で荒くする。うまく行かない?)

# Yang–Mills gradient flow (もしくは格子ゲージ理論の context では Wilson flow)

- Yang–Mills gradient flow (連続理論)

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) = \Delta B_\mu(t, x) + \dots, \quad B_\mu(t=0, x) = A_\mu(x)$$

- Wilson flow (格子理論)

$$\partial_t V(t, x, \mu) V(t, x, \mu)^{-1} = -g_0^2 \partial S_{\text{Wilson}}, \quad V(t=0, x, \mu) = U(x, \mu)$$

- 動機 (Lüscher)

- 格子 QCD シミュレーションにおける critical slowing down の回避 ( $t < 0$  で荒くする。うまく行かない?)
- トポロジカル電荷の定義 ( $t > 0$  で滑らかにする)

# Yang–Mills gradient flow (もしくは格子ゲージ理論の context では Wilson flow)

- Yang–Mills gradient flow (連続理論)

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) = \Delta B_\mu(t, x) + \dots, \quad B_\mu(t=0, x) = A_\mu(x)$$

- Wilson flow (格子理論)

$$\partial_t V(t, x, \mu) V(t, x, \mu)^{-1} = -g_0^2 \partial S_{\text{Wilson}}, \quad V(t=0, x, \mu) = U(x, \mu)$$

- 動機 (Lüscher)

- 格子 QCD シミュレーションにおける critical slowing down の回避 ( $t < 0$  で荒くする。うまく行かない?)
- トポロジカル電荷の定義 ( $t > 0$  で滑らかにする)
- スケールセッティング (Sommer スケール  $r_0$  のような使い方)

$$t^2 \langle E(t, x) \rangle \Big|_{t=t_0} = 0.3, \quad \text{で (例えば) } \sqrt{8t_0} = 0.5 \text{ fm}$$

ここで

$$E(t, x) \equiv \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(t, x) G_{\mu\nu}^a(t, x)$$

# Yang–Mills gradient flow (もしくは格子ゲージ理論の context では Wilson flow)

- Yang–Mills gradient flow (連続理論)

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) = \Delta B_\mu(t, x) + \dots, \quad B_\mu(t=0, x) = A_\mu(x)$$

- Wilson flow (格子理論)

$$\partial_t V(t, x, \mu) V(t, x, \mu)^{-1} = -g_0^2 \partial S_{\text{Wilson}}, \quad V(t=0, x, \mu) = U(x, \mu)$$

- 動機 (Lüscher)

- 格子 QCD シミュレーションにおける critical slowing down の回避 ( $t < 0$  で荒くする。うまく行かない?)
- トポロジカル電荷の定義 ( $t > 0$  で滑らかにする)
- スケールセッティング (Sommer スケール  $r_0$  のような使い方)

$$t^2 \langle E(t, x) \rangle \Big|_{t=t_0} = 0.3, \quad \text{で (例えば) } \sqrt{8t_0} = 0.5 \text{ fm}$$

ここで

$$E(t, x) \equiv \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(t, x) G_{\mu\nu}^a(t, x)$$

- UV 有限な量の定義 ( $t > 0$  で滑らかにする) ← **ここでの使い方**

- Yang–Mills gradient flow

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) + \alpha_0 D_\mu \partial_\nu B_\nu(t, x), \quad B_\mu(t=0, x) = A_\mu(x)$$

ここで右辺第二項はゲージモードを抑圧するために付け加えた。ゲージ不変な量は  $\alpha_0$  によらないことが言える。この方程式の形式解は

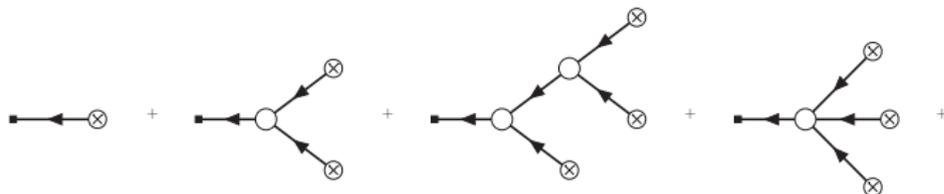
$$B_\mu(t, x) = \int d^D y \left[ K_t(x-y)_{\mu\nu} A_\nu(y) + \int_0^t ds K_{t-s}(x-y)_{\mu\nu} R_\nu(s, y) \right],$$

で与えられる。ここで  $K$  は熱核、 $R$  は非線形項の効果

$$K_t(z)_{\mu\nu} = \int_p \frac{e^{ipz}}{p^2} \left[ (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) e^{-tp^2} + p_\mu p_\nu e^{-\alpha_0 t p^2} \right]$$

$$R_\mu = 2[B_\nu, \partial_\nu B_\mu] - [B_\nu, \partial_\mu B_\nu] + (\alpha_0 - 1)[B_\mu, \partial_\nu B_\nu] + [B_\nu, [B_\nu, B_\mu]]$$

図的には (cross:  $A_\mu$ ; open circle: flow vertex  $R$ ),



- flowed gauge field の量子論的相関関数

$$\langle B_{\mu_1}(t_1, x_1) \cdots B_{\mu_n}(t_n, x_n) \rangle,$$

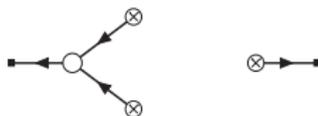
は、初期値  $A_\mu(x)$  の期待値をとることで得られる。例えば、二つの  $A_\mu$  の積の縮役は

$$\langle \text{---} \leftarrow \otimes \otimes \text{---} \rightarrow \text{---} \rangle = \text{~~~~~}$$

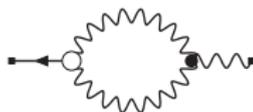
flowed field のプロパゲーター

$$\delta^{ab} g_0^2 \frac{1}{(p^2)^2} \left[ (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) e^{-(t+s)p^2} + \frac{1}{\lambda_0} p_\mu p_\nu e^{-\alpha_0(t+s)p^2} \right],$$

を生み出す (ここで  $t$  と  $s$  は端点の flow time;  $\lambda_0$  は通常のゲージパラメーター)。同様に、例えば



に対しては、通常の Yang-Mills の vertex (黒丸) との縮役を考えて



などとなる

- 無限小のゲージ変換

$$B_\mu(t, x) \rightarrow B_\mu(t, x) + D_\mu \omega(t, x),$$

の元で flow equation

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) + \alpha_0 D_\mu \partial_\nu B_\nu(t, x)$$

は

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) + \alpha_0 D_\mu \partial_\nu B_\nu(t, x) - D_\mu (\partial_t - \alpha_0 D_\nu \partial_\nu) \omega(t, x)$$

と変化する

- 無限小のゲージ変換

$$B_\mu(t, x) \rightarrow B_\mu(t, x) + D_\mu \omega(t, x),$$

の元で flow equation

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) + \alpha_0 D_\mu \partial_\nu B_\nu(t, x)$$

は

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) + \alpha_0 D_\mu \partial_\nu B_\nu(t, x) - D_\mu (\partial_t - \alpha_0 D_\nu \partial_\nu) \omega(t, x)$$

と変化する

- 従って、 $\omega(t, x)$  を

$$(\partial_t - \alpha_0 D_\nu \partial_\nu) \omega(t, x) = -\delta \alpha_0 \partial_\nu B_\nu(t, x), \quad \omega(t=0, x) = 0,$$

の解に選ぶことで、 $\alpha_0$  を

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_0 + \delta \alpha_0$$

と変化させることができる。つまり、異なった  $\alpha_0$  に対応した  $B_\mu(t, x)$  は互いにゲージ変換で結びついている

- 無限小のゲージ変換

$$B_\mu(t, x) \rightarrow B_\mu(t, x) + D_\mu \omega(t, x),$$

の元で flow equation

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) + \alpha_0 D_\mu \partial_\nu B_\nu(t, x)$$

は

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x) + \alpha_0 D_\mu \partial_\nu B_\nu(t, x) - D_\mu (\partial_t - \alpha_0 D_\nu \partial_\nu) \omega(t, x)$$

と変化する

- 従って、 $\omega(t, x)$  を

$$(\partial_t - \alpha_0 D_\nu \partial_\nu) \omega(t, x) = -\delta \alpha_0 \partial_\nu B_\nu(t, x), \quad \omega(t=0, x) = 0,$$

の解に選ぶことで、 $\alpha_0$  を

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_0 + \delta \alpha_0$$

と変化させることができる。つまり、異なった  $\alpha_0$  に対応した  $B_\mu(t, x)$  は互いにゲージ変換で結びついている

- また、 $\omega(t, x)$  を

$$(\partial_t - \alpha_0 D_\nu \partial_\nu) \omega(t, x) = 0, \quad \omega(t=0, x) = \omega(x),$$

の解に選ぶことで  $D$  次元空間のゲージ変換  $\omega(x)$  を  $D+1$  次元のゲージ変換で flow equation を変えないもの  $\omega(t, x)$  に拡張することができる

- flowed gauge field の相関関数

$$\langle B_{\mu_1}(t_1, x_1) \cdots B_{\mu_n}(t_n, x_n) \rangle, \quad t_1 > 0, \dots, t_n > 0,$$

は、繰り込まれたパラメーターで表した時、**波動関数繰り込みなし**で有限になる

- flowed gauge field の相関関数

$$\langle B_{\mu_1}(t_1, x_1) \cdots B_{\mu_n}(t_n, x_n) \rangle, \quad t_1 > 0, \dots, t_n > 0,$$

は、繰り込まれたパラメーターで表した時、**波動関数繰り込みなし**で有限になる

- 最低次の二点関数

$$\langle \tilde{B}_\mu^a(t, p) \tilde{B}_\nu^b(s, q) \rangle \sim \delta^{ab} g_0^2 \frac{1}{(p^2)^2} \left[ (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) e^{-(t+s)p^2} + \frac{1}{\lambda_0} p_\mu p_\nu e^{-\alpha_0(t+s)p^2} \right]$$

- flowed gauge field の相関関数

$$\langle B_{\mu_1}(t_1, x_1) \cdots B_{\mu_n}(t_n, x_n) \rangle, \quad t_1 > 0, \dots, t_n > 0,$$

は、繰り込まれたパラメーターで表した時、**波動関数繰り込みなし**で有限になる

- 最低次の二点関数

$$\langle \tilde{B}_\mu^a(t, p) \tilde{B}_\nu^b(s, q) \rangle \sim \delta^{ab} g_0^2 \frac{1}{(p^2)^2} \left[ (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) e^{-(t+s)p^2} + \frac{1}{\lambda_0} p_\mu p_\nu e^{-\alpha_0(t+s)p^2} \right]$$

- 1 ループレベルでの二点関数 (ただし、Yang-Mills vertex だけを含むもの)



- flowed gauge field の相関関数

$$\langle B_{\mu_1}(t_1, x_1) \cdots B_{\mu_n}(t_n, x_n) \rangle, \quad t_1 > 0, \dots, t_n > 0,$$

は、繰り込まれたパラメーターで表した時、**波動関数繰り込みなし**で有限になる

- 最低次の二点関数

$$\langle \tilde{B}_\mu^a(t, p) \tilde{B}_\nu^b(s, q) \rangle \sim \delta^{ab} g_0^2 \frac{1}{(p^2)^2} \left[ (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) e^{-(t+s)p^2} + \frac{1}{\lambda_0} p_\mu p_\nu e^{-\alpha_0(t+s)p^2} \right]$$

- 1 ループレベルでの二点関数 (ただし、Yang-Mills vertex だけを含むもの)



- 最後の counter term の項は、繰り込まれたパラメーターへの書き換え

$$g_0^2 = \mu^{2\epsilon} g^2 Z, \quad \lambda_0 = \lambda Z_3^{-1}$$

から来る。

- flowed gauge field の相関関数

$$\langle B_{\mu_1}(t_1, x_1) \cdots B_{\mu_n}(t_n, x_n) \rangle, \quad t_1 > 0, \dots, t_n > 0,$$

は、繰り込まれたパラメータで表した時、**波動関数繰り込みなし**で有限になる

- 最低次の二点関数

$$\langle \tilde{B}_\mu^a(t, p) \tilde{B}_\nu^b(s, q) \rangle \sim \delta^{ab} g_0^2 \frac{1}{(p^2)^2} \left[ (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) e^{-(t+s)p^2} + \frac{1}{\lambda_0} p_\mu p_\nu e^{-\alpha_0(t+s)p^2} \right]$$

- 1 ループレベルでの二点関数 (ただし、Yang-Mills vertex だけを含むもの)



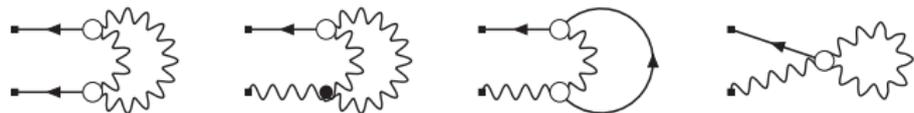
- 最後の counter term の項は、繰り込まれたパラメータへの書き換え

$$g_0^2 = \mu^{2\epsilon} g^2 Z, \quad \lambda_0 = \lambda Z_3^{-1}$$

から来る。

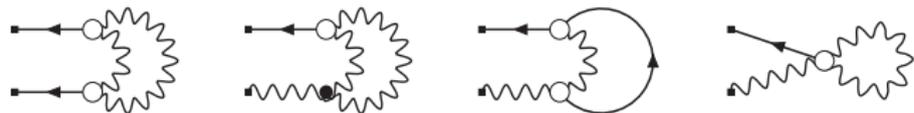
- 通常はこれに波動関数繰り込みも合わせてはじめて有限になるのだが...

- ... ここでは、flow vertex を含んだダイアグラムがあり



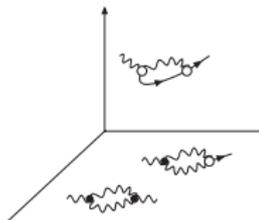
これらが、波動関数繰り込みとちょうど同じ効果を与えることがわかる

- ... ここでは、flow vertex を含んだダイアグラムがあり

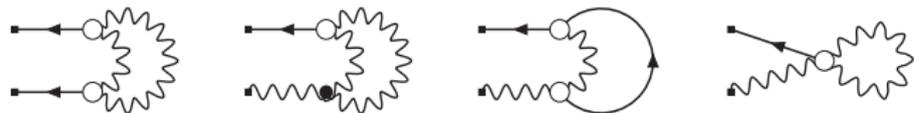


これらが、波動関数繰り込みとちょうど同じ効果を与えることがわかる

- 全次数での証明 (Lüscher–Weisz (2011))

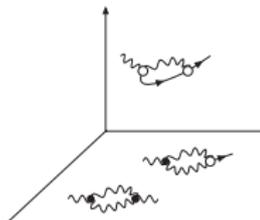


- ... ここでは、flow vertex を含んだダイアグラムがあり



これらが、波動関数繰り込みとちょうど同じ効果を与えることがわかる

- 全次数での証明 (Lüscher–Weisz (2011))

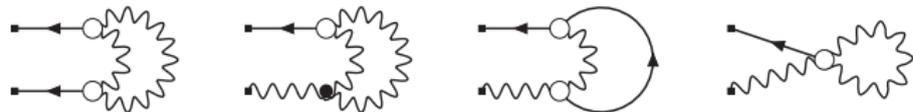


- vertex が全てバルク部分 ( $t > 0$ ) にある時、ループ規分は常に flow-time の発展演算子

$$\sim e^{-t\ell^2}$$

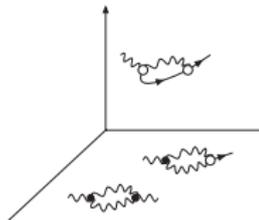
を含み、この因子がループ積分を有限にする：bulk counterterm は必要ない

- ... ここでは、flow vertex を含んだダイアグラムがあり



これらが、波動関数繰り込みとちょうど同じ効果を与えることがわかる

- 全次数での証明 (Lüscher–Weisz (2011))



- vertex が全てバルク部分 ( $t > 0$ ) にある時、ループ規分は常に flow-time の発展演算子

$$\sim e^{-t\ell^2}$$

を含み、この因子がループ積分を有限にする：bulk counterterm は必要ない

- BRS 対称性を使うことにより、boundary ( $t = 0$ ) counterterm は通常の Yang–Mills のものにとどまることが言える

- flow gauge field の相関関数

$$\langle B_{\mu_1}(t_1, x_1) B_{\mu_2}(t_2, x_2) \cdots B_{\mu_n}(t_n, x_n) \rangle, \quad t_1 > 0, \dots, t_n > 0,$$

は、**同一点の積**に対しても有限にとどまる

$$t_1 \rightarrow t_2, \quad x_1 \rightarrow x_2,$$



- flow gauge field の相関関数

$$\langle B_{\mu_1}(t_1, x_1) B_{\mu_2}(t_2, x_2) \cdots B_{\mu_n}(t_n, x_n) \rangle, \quad t_1 > 0, \dots, t_n > 0,$$

は、**同一点の積**に対しても有限にとどまる

$$t_1 \rightarrow t_2, \quad x_1 \rightarrow x_2,$$



- 新しいループは必ず flow-time の発展演算子  $\sim e^{-t\ell^2}$  を含み、これが積分を UV 有限にする：新しい発散はあらわれない

- flow gauge field の相関関数

$$\langle B_{\mu_1}(t_1, x_1) B_{\mu_2}(t_2, x_2) \cdots B_{\mu_n}(t_n, x_n) \rangle, \quad t_1 > 0, \dots, t_n > 0,$$

は、**同一点の積に対しても有限にとどまる**

$$t_1 \rightarrow t_2, \quad x_1 \rightarrow x_2,$$



- 新しいループは必ず flow-time の発展演算子  $\sim e^{-t\ell^2}$  を含み、これが積分を UV 有限にする：新しい発散はあらわれない
- これは極めて強力な性質!**

$$B_\mu(t, x) B_\nu(t, x) |_{\text{Dimensional Reg.}} = B_\mu(t, x) B_\nu(t, x) |_{\text{Lattice}}$$

- flow gauge field の相関関数

$$\langle B_{\mu_1}(t_1, x_1) B_{\mu_2}(t_2, x_2) \cdots B_{\mu_n}(t_n, x_n) \rangle, \quad t_1 > 0, \dots, t_n > 0,$$

は、**同一点の積に対しても**有限にとどまる

$$t_1 \rightarrow t_2, \quad x_1 \rightarrow x_2,$$



- 新しいループは必ず flow-time の発展演算子  $\sim e^{-t\ell^2}$  を含み、これが積分を UV 有限にする：新しい発散はあらわれない
- これは極めて強力な性質!**

$$B_\mu(t, x) B_\nu(t, x) |_{\text{Dimensional Reg.}} = B_\mu(t, x) B_\nu(t, x) |_{\text{Lattice}}$$

- 一方、ここでの問題の難しさは

$$(A_R)_\mu(x) (A_R)_\nu(x) |_{\text{Dimensional Regularization}} \neq (A_R)_\mu(x) (A_R)_\nu(x) |_{\text{lattice}}$$

から来る

- flow gauge field の相関関数

$$\langle B_{\mu_1}(t_1, x_1) B_{\mu_2}(t_2, x_2) \cdots B_{\mu_n}(t_n, x_n) \rangle, \quad t_1 > 0, \dots, t_n > 0,$$

は、**同一点の積に対しても**有限にとどまる

$$t_1 \rightarrow t_2, \quad x_1 \rightarrow x_2,$$



- 新しいループは必ず flow-time の発展演算子  $\sim e^{-t\ell^2}$  を含み、これが積分を UV 有限にする：新しい発散はあらわれない
- これは極めて強力な性質!**

$$B_{\mu}(t, x) B_{\nu}(t, x) |_{\text{Dimensional Reg.}} = B_{\mu}(t, x) B_{\nu}(t, x) |_{\text{Lattice}}$$

- 一方、ここでの問題の難しさは

$$(A_R)_{\mu}(x) (A_R)_{\nu}(x) |_{\text{Dimensional Regularization}} \neq (A_R)_{\mu}(x) (A_R)_{\nu}(x) |_{\text{lattice}}$$

から来る

- gradient flow のこの性質に注目し、我々は次元正則化での EMT と gradient flow で定義されるある量とを関係づける

- $D = 4 - 2\epsilon$  次元における  $SU(N)$  Yang-Mills 理論

$$S = \frac{1}{4g_0^2} \int d^D x F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x)$$

- $D = 4 - 2\epsilon$  次元における  $SU(N)$  Yang-Mills 理論

$$S = \frac{1}{4g_0^2} \int d^D x F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x)$$

- 次元正則化を仮定すれば、それは並進対称性を保つので、素朴な表式

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{g_0^2} \left[ F_{\mu\rho}^a(x) F_{\nu\rho}^a(x) - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x) \right]$$

が正しい WT 関係式

$$\langle \partial_\mu T_{\mu\nu}(x) \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \cdots \rangle = -\delta(x-y) \langle \partial_\nu \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \cdots \rangle + \cdots$$

を満たす。この  $T_{\mu\nu}(x)$  が乗法繰り込みを受けないこともこの式から従う

- $D = 4 - 2\epsilon$  次元における  $SU(N)$  Yang-Mills 理論

$$S = \frac{1}{4g_0^2} \int d^D x F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x)$$

- 次元正則化を仮定すれば、それは並進対称性を保つので、素朴な表式

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{g_0^2} \left[ F_{\mu\rho}^a(x) F_{\nu\rho}^a(x) - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x) \right]$$

が正しい WT 関係式

$$\langle \partial_\mu T_{\mu\nu}(x) \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \cdots \rangle = -\delta(x-y) \langle \partial_\nu \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \cdots \rangle + \cdots$$

を満たす。この  $T_{\mu\nu}(x)$  が乗法繰り込みを受けないこともこの式から従う

- そこで、VEV は引いておくことにして、我々は繰り込まれた EMT を (次元正則化のもとで)

$$\{T_{\mu\nu}\}_R(x) = T_{\mu\nu}(x) - \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$$

で定義する

- 正しい EMT の重要な特徴の一つは trace anomaly である

$$\delta_{\mu\nu} \{T_{\mu\nu}\}_R(x) = -\frac{\beta}{2g^3} \{F_{\rho\sigma}^a F_{\rho\sigma}^a\}_R(x)$$

ここで、右辺の複合演算子は MS スキームで定義されているとする。β 関数は

$$g_0^2 \equiv \mu^{2\epsilon} g^2 Z,$$

から

$$\beta \equiv \left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right)_0 g = -\frac{1}{2} g \left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right)_0 \ln Z,$$

で与えられる（ここで添字 0 は微分が裸の量をとめて取られることを意味する）。具体的には、

$$Z = 1 - \frac{1}{\epsilon} \left[ b_0 g^2 + \frac{1}{2} b_1 g^4 + O(g^6) \right] + O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right), \quad b_0 = \frac{11N}{48\pi^2}, \quad b_1 = \frac{17N^2}{384\pi^4},$$

より

$$\beta = -b_0 g^3 - b_1 g^5 + O(g^7)$$

となる

- さて、我々は上の正しい EMT  $\{T_{\mu\nu}\}_R(x)$  と gradient flow で定義される量とを関係づけたい

- さて、我々は上の正しい EMT  $\{T_{\mu\nu}\}_R(x)$  と gradient flow で定義される量とを関係づけたい
- そこで、以下の次元 4 のゲージ不変な局所積を考えてみる

$$U_{\mu\nu}(t, x) \equiv G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}^a(t, x)G_{\rho\sigma}^a(t, x)$$

$$E(t, x) \equiv \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a(t, x)G_{\mu\nu}^a(t, x)$$

- さて、我々は上の正しい EMT  $\{T_{\mu\nu}\}_R(x)$  と gradient flow で定義される量とを関係づけたい
- そこで、以下の次元 4 のゲージ不変な局所積を考えてみる

$$U_{\mu\nu}(t, x) \equiv G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}^a(t, x)G_{\rho\sigma}^a(t, x)$$

$$E(t, x) \equiv \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a(t, x)G_{\mu\nu}^a(t, x)$$

- flow equation は拡散方程式であり、 $x$  空間での拡散長さは  $\sim\sqrt{8t}$  である。従って、 $t \rightarrow 0$  の極限では、 $U_{\mu\nu}(t, x)$  や  $E(t, x)$  は  $D$  次元  $x$  空間での局所量と見なすことができる

- さて、我々は上の正しい EMT  $\{T_{\mu\nu}\}_R(x)$  と gradient flow で定義される量とを関係づけたい
- そこで、以下の次元 4 のゲージ不変な局所積を考えてみる

$$U_{\mu\nu}(t, x) \equiv G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}^a(t, x)G_{\rho\sigma}^a(t, x)$$

$$E(t, x) \equiv \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a(t, x)G_{\mu\nu}^a(t, x)$$

- flow equation は拡散方程式であり、 $x$  空間での拡散長さは  $\sim\sqrt{8t}$  である。従って、 $t \rightarrow 0$  の極限では、 $U_{\mu\nu}(t, x)$  や  $E(t, x)$  は  $D$  次元  $x$  空間での局所量と見なすことができる
- さらに、gradient flow の UV 有限性から、これらは UV 有限な量である

- さて、我々は上の正しい EMT  $\{T_{\mu\nu}\}_R(x)$  と gradient flow で定義される量とを関係づけたい
- そこで、以下の次元 4 のゲージ不変な局所積を考えてみる

$$U_{\mu\nu}(t, x) \equiv G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}^a(t, x)G_{\rho\sigma}^a(t, x)$$
$$E(t, x) \equiv \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a(t, x)G_{\mu\nu}^a(t, x)$$

- flow equation は拡散方程式であり、 $x$  空間での拡散長さは  $\sim\sqrt{8t}$  である。従って、 $t \rightarrow 0$  の極限では、 $U_{\mu\nu}(t, x)$  や  $E(t, x)$  は  $D$  次元  $x$  空間での局所量と見なすことができる
- さらに、gradient flow の UV 有限性から、これらは UV 有限な量である
- これらのことから、上の局所積は  $t \rightarrow 0$  では  $D$  次元の繰り込まれた演算子の漸近級数（その係数も有限）として書ける（はずである）：

$$U_{\mu\nu}(t, x) = \alpha_U(t) \left[ \{T_{\mu\nu}\}_R(x) - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu} \{T_{\rho\rho}\}_R(x) \right] + O(t),$$
$$E(t, x) = \langle E(t, x) \rangle + \alpha_E(t) \{T_{\rho\rho}\}_R(x) + O(t),$$

ここで  $U_{\mu\nu}(x)$  が  $D = 4$  で traceless であることを用いた。  $O(t)$  は次元 6 以上の演算子の寄与

- 上の展開

$$U_{\mu\nu}(t, x) = \alpha_U(t) \left[ \{T_{\mu\nu}\}_R(x) - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \{T_{\rho\rho}\}_R(x) \right] + O(t),$$

$$E(t, x) = \langle E(t, x) \rangle + \alpha_E(t) \{T_{\rho\rho}\}_R(x) + O(t),$$

からトレース部分  $\{T_{\rho\rho}\}_R(x)$  を消去すると、

$$\{T_{\mu\nu}\}_R(x) = \frac{1}{\alpha_U(t)} U_{\mu\nu}(t, x) + \frac{1}{4\alpha_E(t)} \delta_{\mu\nu} [E(t, x) - \langle E(t, x) \rangle] + O(t)$$

従って、もし係数関数  $\alpha_U(t)$  と  $\alpha_E(t)$  の  $t \rightarrow 0$  の振る舞いがわかれば、EMT は右辺の組み合わせの  $t \rightarrow 0$  極限として得られるだろう

- $\alpha_U(t)$  と  $\alpha_E(t)$  の  $t \rightarrow 0$  での振る舞いを調べるために、展開式の両辺に

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right)_0$$

を作用させる

- $\alpha_U(t)$  と  $\alpha_E(t)$  の  $t \rightarrow 0$  での振る舞いを調べるために、展開式の両辺に

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right)_0$$

を作用させる

- 裸の量で書いた時に左辺は  $\mu$  を含まないので、右辺に対しても

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right)_0 \alpha_U(t) \left[ \{T_{\mu\nu}\}_R(x) - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \{T_{\rho\rho}\}_R(x) \right] = 0,$$

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right)_0 \alpha_E(t) \{T_{\rho\rho}\}_R(x) = 0$$

- $\alpha_U(t)$  と  $\alpha_E(t)$  の  $t \rightarrow 0$  での振る舞いを調べるために、展開式の両辺に

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)_0$$

を作用させる

- 裸の量で書いた時に左辺は  $\mu$  を含まないので、右辺に対しても

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)_0 \alpha_U(t) \left[ \{T_{\mu\nu}\}_R(x) - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \{T_{\rho\rho}\}_R(x) \right] = 0,$$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)_0 \alpha_E(t) \{T_{\rho\rho}\}_R(x) = 0$$

- 正しい EMT は繰り込みを受けないので、結局

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)_0 \alpha_U(t) = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g}\right) \alpha_U(t) = 0,$$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)_0 \alpha_E(t) = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g}\right) \alpha_E(t) = 0$$

を得る

- 上の繰り込み群方程式は

$$q \frac{d\bar{g}(q)}{dq} = \beta(\bar{g}(q)), \quad \bar{g}(q = \mu) = g$$

で定義される running coupling  $\bar{g}(q)$  を使うと、係数関数が繰り込みスケールによらないと言っている：

$$\alpha_U(t)(\bar{g}(q); q) = \alpha_U(t)(\bar{g}(q'); q').$$

- 上の繰り込み群方程式は

$$q \frac{d\bar{g}(q)}{dq} = \beta(\bar{g}(q)), \quad \bar{g}(q = \mu) = g$$

で定義される running coupling  $\bar{g}(q)$  を使うと、係数関数が繰り込みスケールによらないと言っている：

$$\alpha_U(t)(\bar{g}(q); q) = \alpha_U(t)(\bar{g}(q'); q').$$

- そこで、繰り込みスケールとして、

$$q = \mu, \quad q' = \frac{1}{\sqrt{8t}}$$

と取ることもでき、これから

$$\alpha_U(t)(g; \mu) = \alpha_U(t)(\bar{g}(1/\sqrt{8t}); 1/\sqrt{8t})$$

を得る

- 上の繰り込み群方程式は

$$q \frac{d\bar{g}(q)}{dq} = \beta(\bar{g}(q)), \quad \bar{g}(q = \mu) = g$$

で定義される running coupling  $\bar{g}(q)$  を使うと、係数関数が繰り込みスケールによらないと言っている：

$$\alpha_U(t)(\bar{g}(q); q) = \alpha_U(t)(\bar{g}(q'); q').$$

- そこで、繰り込みスケールとして、

$$q = \mu, \quad q' = \frac{1}{\sqrt{8t}}$$

と取ることもでき、これから

$$\alpha_U(t)(g; \mu) = \alpha_U(t)(\bar{g}(1/\sqrt{8t}); 1/\sqrt{8t})$$

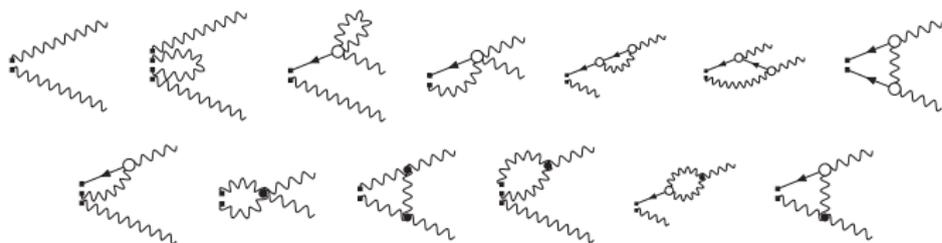
を得る

- $q \rightarrow \infty$  に対して running coupling は

$$\bar{g}(q)^2 = \frac{1}{b_0 \ln(q^2/\Lambda^2)} - \frac{b_1 \ln[\ln(q^2/\Lambda^2)]}{b_0^3 \ln^2(q^2/\Lambda^2)} + O\left(\frac{\ln^2[\ln(q^2/\Lambda^2)]}{\ln^3(q^2/\Lambda^2)}\right),$$

と振る舞う（漸近的自由性）ので、 $t \rightarrow 0$  で  $\bar{g}(1/\sqrt{8t}) \rightarrow 0$  となり、係数関数は摂動論で評価できる

- 1 ループまでで、次のようなダイアグラムを評価する必要がある



MS スキームでの繰り込まれた gauge coupling の言葉では

$$\alpha_U(t)(g; \mu) = g^2 \left\{ 1 + 2b_0 \left[ \ln(\sqrt{8t}\mu) + s_1 \right] g^2 + O(g^4) \right\},$$

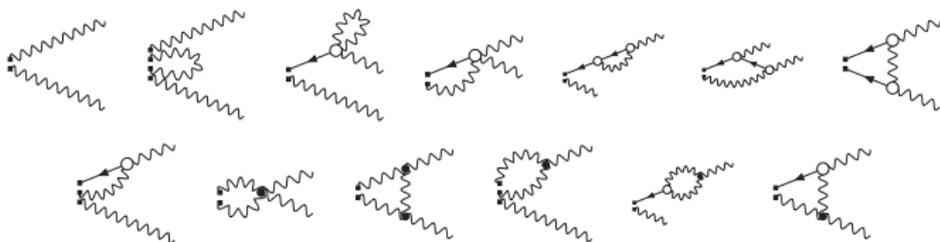
$$\alpha_E(t)(g; \mu) = \frac{1}{2b_0} \left\{ 1 + 2b_0 s_2 g^2 + O(g^4) \right\},$$

ここで

$$s_1 = \ln \sqrt{\pi} + \frac{7}{16} \simeq 1.00986, \quad s_2 = \frac{109}{176} - \frac{b_1}{2b_0^2} \simeq 0.197831$$

係数関数は確かに UV 有限である

- 1 ループまでで、次のようなダイアグラムを評価する必要がある



MS スキームでの繰り込まれた gauge coupling の言葉では

$$\alpha_U(t)(g; \mu) = g^2 \left\{ 1 + 2b_0 \left[ \ln(\sqrt{8t}\mu) + s_1 \right] g^2 + O(g^4) \right\},$$

$$\alpha_E(t)(g; \mu) = \frac{1}{2b_0} \left\{ 1 + 2b_0 s_2 g^2 + O(g^4) \right\},$$

ここで

$$s_1 = \ln \sqrt{\pi} + \frac{7}{16} \simeq 1.00986, \quad s_2 = \frac{109}{176} - \frac{b_1}{2b_0^2} \simeq 0.197831$$

係数関数は確かに UV 有限である

- 上の繰り込み群の議論と組み合わせると

$$\alpha_U(t) = \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \left\{ 1 + 2b_0 s_1 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 + O(\bar{g}^4) \right\},$$

$$\alpha_E(t) = \frac{1}{2b_0} \left\{ 1 + 2b_0 s_2 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 + O(\bar{g}^4) \right\}$$

- 従って、

$$\frac{1}{\alpha_U(t)} = \frac{1}{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2} - 2b_0s_1 + O(\bar{g}^2),$$

および

$$\frac{1}{4\alpha_E(t)} = \frac{b_0}{2} \left[ 1 - 2b_0s_2\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 + O(\bar{g}^4) \right]$$

- 従って、

$$\frac{1}{\alpha_U(t)} = \frac{1}{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2} - 2b_0 s_1 + O(\bar{g}^2),$$

および

$$\frac{1}{4\alpha_E(t)} = \frac{b_0}{2} \left[ 1 - 2b_0 s_2 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 + O(\bar{g}^4) \right]$$

- 以上の議論を合わせると

$$\{T_{\mu\nu}\}_R(x) \stackrel{t \rightarrow 0^+}{\sim} \left\{ \left[ \frac{1}{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2} - 2b_0 s_1 \right] U_{\mu\nu}(t, x) + \frac{b_0}{2} \left[ 1 - 2b_0 s_2 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \right] \delta_{\mu\nu} [E(t, x) - \langle E(t, x) \rangle] \right\}$$

gradient flow で定義される局所積の  $t \rightarrow 0$  の振る舞いから **正しく規格化された保存する EMT** を抜き出す公式を得た

- 従って、

$$\frac{1}{\alpha_U(t)} = \frac{1}{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2} - 2b_0 s_1 + O(\bar{g}^2),$$

および

$$\frac{1}{4\alpha_E(t)} = \frac{b_0}{2} \left[ 1 - 2b_0 s_2 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 + O(\bar{g}^4) \right]$$

- 以上の議論を合わせると

$$\{T_{\mu\nu}\}_R(x) \stackrel{t \rightarrow 0^+}{\sim} \left\{ \left[ \frac{1}{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2} - 2b_0 s_1 \right] U_{\mu\nu}(t, x) + \frac{b_0}{2} \left[ 1 - 2b_0 s_2 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \right] \delta_{\mu\nu} [E(t, x) - \langle E(t, x) \rangle] \right\}$$

gradient flow で定義される局所積の  $t \rightarrow 0$  の振る舞いから **正しく規格化された保存する EMT** を抜き出す公式を得た

- 右辺の量の相関関数は（原理的には）**格子正則化で非摂動的に**計算できるはず

- 従って、

$$\frac{1}{\alpha_U(t)} = \frac{1}{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2} - 2b_0 s_1 + O(\bar{g}^2),$$

および

$$\frac{1}{4\alpha_E(t)} = \frac{b_0}{2} \left[ 1 - 2b_0 s_2 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 + O(\bar{g}^4) \right]$$

- 以上の議論を合わせると

$$\{T_{\mu\nu}\}_R(x) \stackrel{t \rightarrow 0^+}{\sim} \left\{ \left[ \frac{1}{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2} - 2b_0 s_1 \right] U_{\mu\nu}(t, x) + \frac{b_0}{2} \left[ 1 - 2b_0 s_2 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \right] \delta_{\mu\nu} [E(t, x) - \langle E(t, x) \rangle] \right\}$$

gradient flow で定義される局所積の  $t \rightarrow 0$  の振る舞いから **正しく規格化された保存する EMT** を抜き出す公式を得た

- 右辺の量の相関関数は（原理的には）**格子正則化で非摂動的に**計算できるはず
- 実際には

$$a \ll \sqrt{8t} \ll \frac{1}{\Lambda}$$

で  $t \rightarrow 0$  とする必要がある、実用性は自明ではない



- 配位生成：Wilson plaquette 作用、擬熱浴法 (+ 過緩和法)

- 配位生成 : Wilson plaquette 作用、擬熱浴法 (+ 過緩和法)
- Wilson flow : 3 次の Runge–Kutta 法 (Lüscher)、 $\epsilon = \Delta t/a^2 = 0.01$ 、 $t/a^2 \in [0, 6]$

- 配位生成 : Wilson plaquette 作用、擬熱浴法 (+ 過緩和法)
- Wilson flow : 3 次の Runge–Kutta 法 (Lüscher)、 $\epsilon = \Delta t/a^2 = 0.01$ 、 $t/a^2 \in [0, 6]$
- field strength  $G_{\mu\nu}^a(x)$  はクロージャーで定義、微分は対称差分

- 配位生成：Wilson plaquette 作用、擬熱浴法 (+ 過緩和法)
- Wilson flow：3 次の Runge–Kutta 法 (Lüscher)、 $\epsilon = \Delta t/a^2 = 0.01$ 、 $t/a^2 \in [0, 6]$
- field strength  $G_{\mu\nu}^a(x)$  はクローバーで定義、微分は対称差分
- シミュレーションパラメーター

lattice	$\beta$	$N_{\text{config}}$	$a/\sqrt{t_0}$	
$16^4$	2.64	100	0.8971(63)	$a \simeq 0.036 \text{ fm for } \sqrt{\sigma} = 440 \text{ MeV}$
$24^4$	2.80	100	0.5660(48)	
$32^4$	2.91	100	0.4125(40)	

- 配位生成：Wilson plaquette 作用、擬熱浴法 (+ 過緩和法)
- Wilson flow：3 次の Runge–Kutta 法 (Lüscher)、 $\epsilon = \Delta t/a^2 = 0.01$ 、 $t/a^2 \in [0, 6]$
- field strength  $G_{\mu\nu}^a(x)$  はクローバーで定義、微分は対称差分
- シミュレーションパラメーター

lattice	$\beta$	$N_{\text{config}}$	$a/\sqrt{t_0}$	
$16^4$	2.64	100	0.8971(63)	$a \simeq 0.036 \text{ fm for } \sqrt{\sigma} = 440 \text{ MeV}$
$24^4$	2.80	100	0.5660(48)	
$32^4$	2.91	100	0.4125(40)	

- ここで、reference スケール  $t_0$  を、“エネルギー密度”

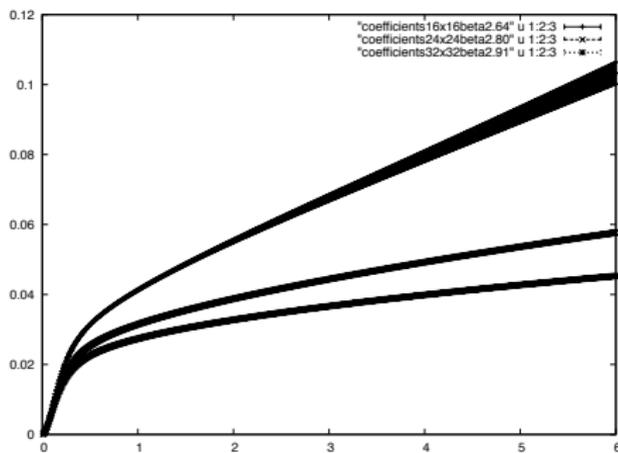
$$E(t, x) = \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(t, x) G_{\mu\nu}^a(t, x)$$

の期待値を用い

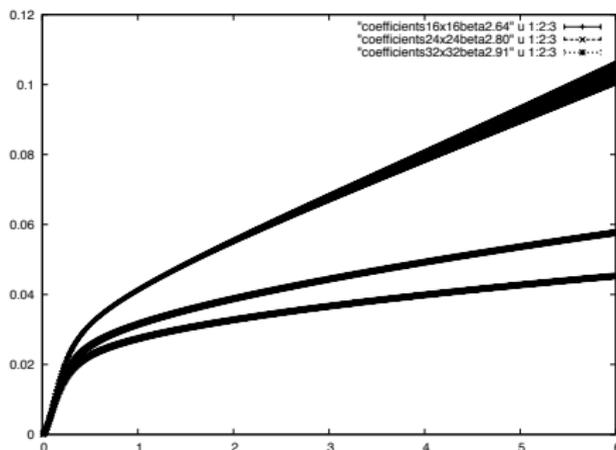
$$t^2 \langle E(t, x) \rangle \Big|_{t=t_0} = 0.045$$

で定義した

- $t/a^2$  の関数としての  $t^2 \langle E(t, x) \rangle$



- $t/a^2$  の関数としての  $t^2 \langle E(t, x) \rangle$



- この測定値と摂動論的評価 (Lüscher (2010))

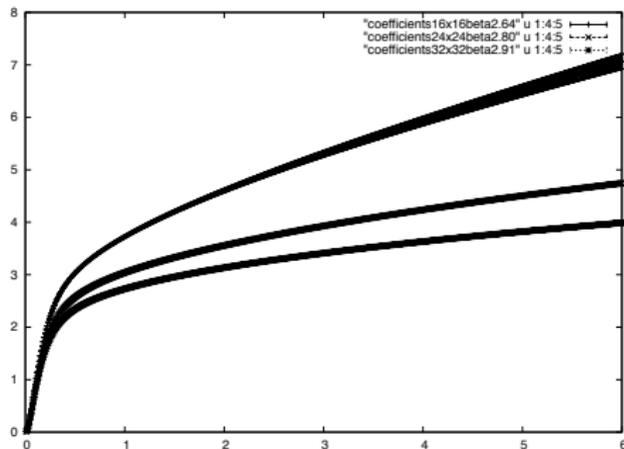
$$t^2 \langle E(t, x) \rangle \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{3(N^2 - 1)}{128\pi^2} \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \left[ 1 + 2b_0 c \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \right],$$

ここで MS スキームでは

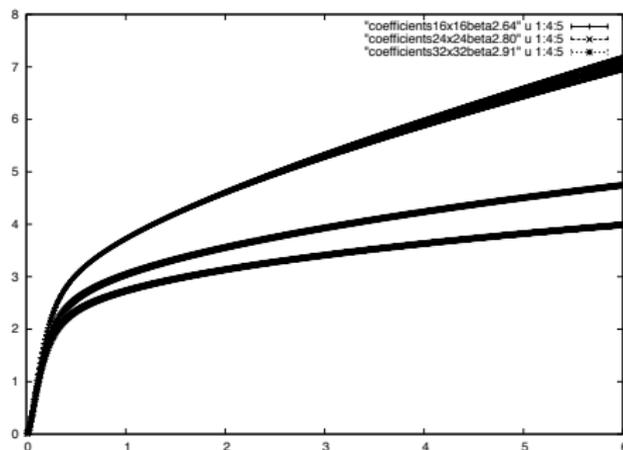
$$c \equiv \ln(2\sqrt{\pi}) + \frac{26}{33} - \frac{9}{22} \ln 3 \simeq 1.60396,$$

を合わせて、摂動論的な running coupling  $\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2$  を評価してみると...

- 摂動論的 running coupling  $\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2$



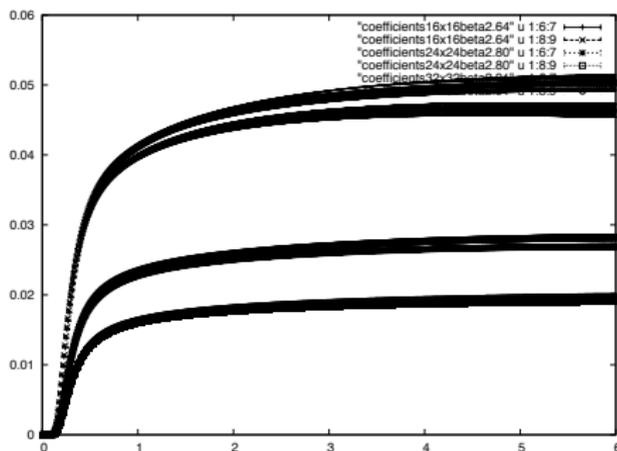
- 撮動論的 running coupling  $\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2$



- 撮動論的表式に基づいたこの評価は、次の “effective  $\Lambda$  parameter” が (ほぼ) 定数と見なせる領域で信頼できる

$$\Lambda(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{8t}} \left[ b_0 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \right]^{-b_1/(2b_0^2)} e^{-1/[2b_0 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2]} \\ \times \exp \left[ -\frac{-b_1^2 + b_0 b_2}{2b_0^3} \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 - \frac{b_1^3 - 2b_0 b_1 b_2 + b_0^2 b_3}{4b_0^4} \bar{g}(1/\sqrt{8t})^4 \right]$$

- $t/a^2$  の関数としての  $a\Lambda(t)$



(理想的には) これがほぼ平らになっている領域の  $t/a^2$  を使うべきである

- 極限の順序が重要

- 極限の順序が重要
- まず、flow time  $t$  を物理的単位で固定したまま、連続極限  $a \rightarrow 0$  をとる（これで連続 Yang–Mills 理論での flow させた値が得られる）

- 極限の順序が重要
- まず、flow time  $t$  を物理的単位で固定したまま、連続極限  $a \rightarrow 0$  をとる（これで連続 Yang–Mills 理論での flow させた値が得られる）
- 次に EMT を抜き出すために small flow time limit  $t \rightarrow 0$  をとる

- 極限の順序が重要
- まず、flow time  $t$  を物理的単位で固定したまま、連続極限  $a \rightarrow 0$  をとる（これで連続 Yang–Mills 理論での flow させた値が得られる）
- 次に EMT を抜き出すために small flow time limit  $t \rightarrow 0$  をとる
- $t$  を物理的単位で固定という条件は

$$t^2 \langle E(t, x) \rangle = \text{一定}$$

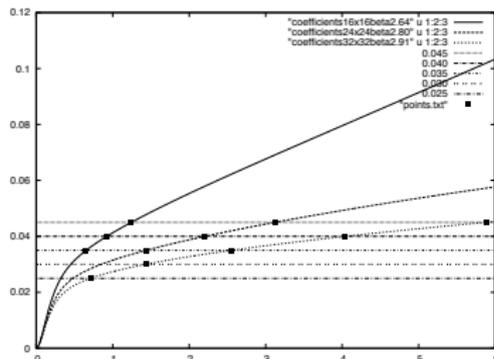
として指定できると考えられる

- 極限の順序が重要
- まず、flow time  $t$  を物理的単位で固定したまま、連続極限  $a \rightarrow 0$  をとる（これで連続 Yang–Mills 理論での flow させた値が得られる）
- 次に EMT を抜き出すために small flow time limit  $t \rightarrow 0$  をとる
- $t$  を物理的単位で固定という条件は

$$t^2 \langle E(t, x) \rangle = \text{一定}$$

として指定できると考えられる

- $t^2 \langle E(t, x) \rangle = 0.045, 0.040, 0.035$  の三通り（格子間隔もそれぞれ三通り）と  $32^4$  格子で  $t^2 \langle E(t, x) \rangle = 0.030, 0.025$  の場合を考えた



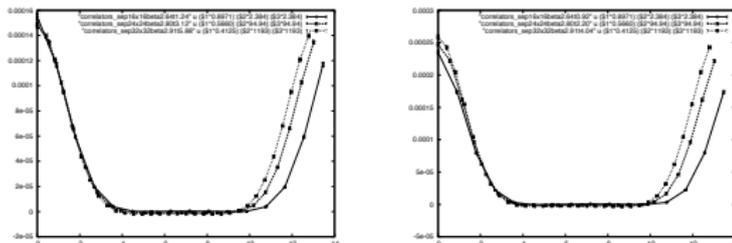
- 相関関数の例

$$\langle U_{01}(t, x) U_{01}(t_0, 0) \rangle \quad x = (x_0, 0, 0, 0)$$

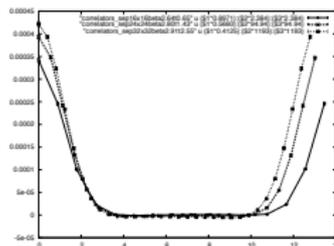
- 相関関数の例

$$\langle U_{01}(t, x) U_{01}(t_0, 0) \rangle \quad x = (x_0, 0, 0, 0)$$

- $t$  が  $t^2 \langle E(t, x) \rangle = 0.045$  (一番上の水平線) と  $t^2 \langle E(t, x) \rangle = 0.040$  (上から二番目の水平線) の場合



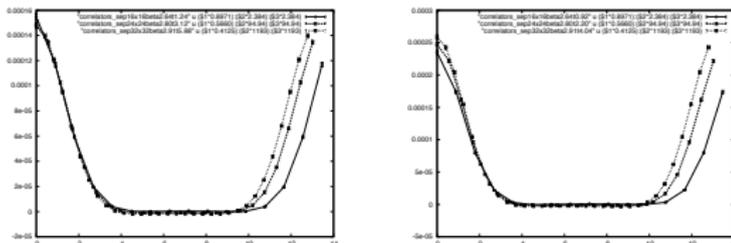
- $t$  が  $t^2 \langle E(t, x) \rangle = 0.035$  (三番目の水平線) の場合



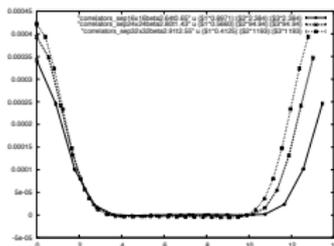
- 相関関数の例

$$\langle U_{01}(t, x) U_{01}(t_0, 0) \rangle \quad x = (x_0, 0, 0, 0)$$

- $t$  が  $t^2 \langle E(t, x) \rangle = 0.045$  (一番上の水平線) と  $t^2 \langle E(t, x) \rangle = 0.040$  (上から二番目の水平線) の場合



- $t$  が  $t^2 \langle E(t, x) \rangle = 0.035$  (三番目の水平線) の場合



- いずれも格子間隔の関数としてきれいにスケールしており (今の場合、 $a \rightarrow 0$  極限は有限のはず)、特に  $32^4$  格子は連続極限に十分近いように思われる

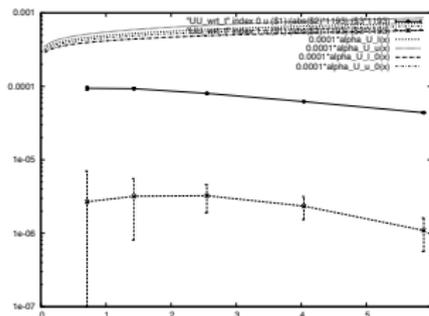
- そこで、 $32^4$  格子の場合の相関関数

$$|\langle U_{01}(t, x) U_{01}(t_0, 0) \rangle|$$

の  $x = (x_0 = 5a, 0, 0, 0)$  と  $x = (x_0 = 10a, 0, 0, 0)$  での値および  $t \rightarrow 0$  で期待される漸近的振る舞い

$$U_{\mu\nu}(t, x) \propto \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \left\{ 1 + 2b_0 s_1 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \right\}$$

を  $t$  の関数として対数プロットすると (ここで、 $\bar{g}(1/\sqrt{8t})$  は 2 ループの表式、 $a\Lambda = 0.015-0.020$  とした)



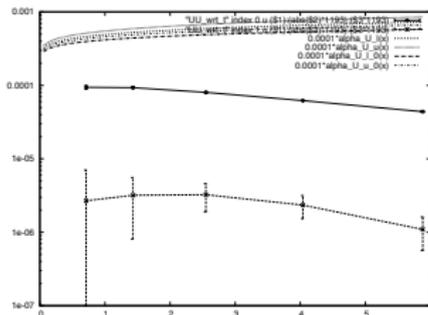
- そこで、 $32^4$  格子の場合の相関関数

$$|\langle U_{01}(t, x) U_{01}(t_0, 0) \rangle|$$

の  $x = (x_0 = 5a, 0, 0, 0)$  と  $x = (x_0 = 10a, 0, 0, 0)$  での値および  $t \rightarrow 0$  で期待される漸近的振る舞い

$$U_{\mu\nu}(t, x) \propto \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \left\{ 1 + 2b_0 s_1 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \right\}$$

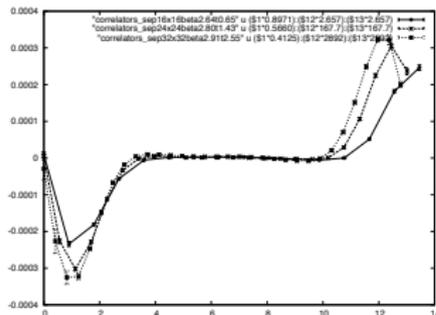
を  $t$  の関数として対数プロットすると (ここで、 $\bar{g}(1/\sqrt{8t})$  は 2 ループの表式、 $a\Lambda = 0.015-0.020$  とした)



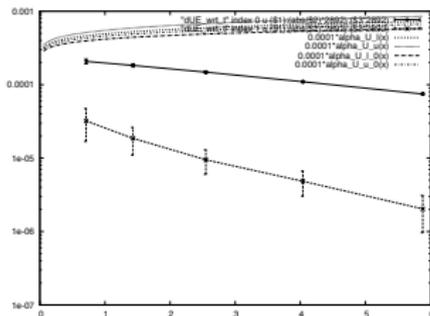
- $t/t_0 \gtrsim 0.2$  では高次の演算子の寄与 (我々の議論で無視した  $O(t)$  の項) が支配的である

- 同様の状況は、別の相関関数

$$|\langle \partial_\mu U_{\mu 0}(t, x) E(t_0, 0) \rangle|$$

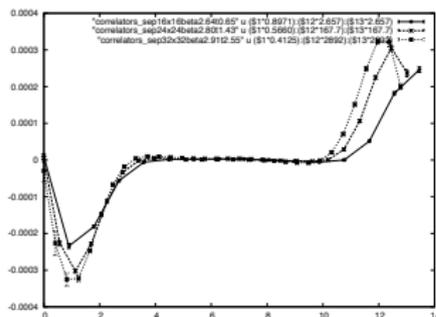


についても見られる

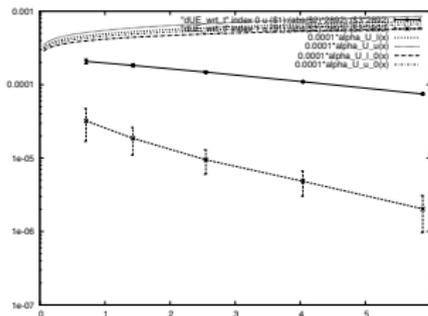


- 同様の状況は、別の相関関数

$$|\langle \partial_\mu U_{\mu 0}(t, x) E(t_0, 0) \rangle|$$



についても見られる



- 残念ながら、現在のパラメータでの  $t$  は  $O(t)$  の項を無視できるほど小さくない

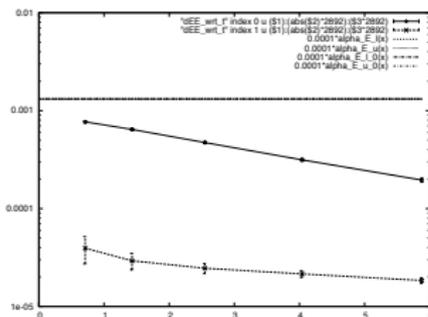
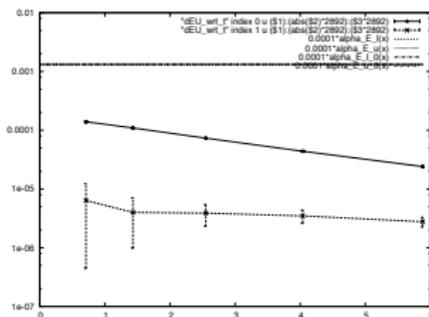
- $E(t, x)$  に関して

$$|\langle \partial_1 E(t, x) U_{01}(t_0, 0) \rangle| \quad |\langle \partial_0 E(t, x) E(t_0, 0) \rangle|$$

および  $t \rightarrow 0$  での漸近的な振る舞い

$$E(t, x) - \langle E(t, x) \rangle \propto \frac{1}{2b_0} \left\{ 1 + 2b_0 s_2 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \right\}$$

の対数プロットは



となる

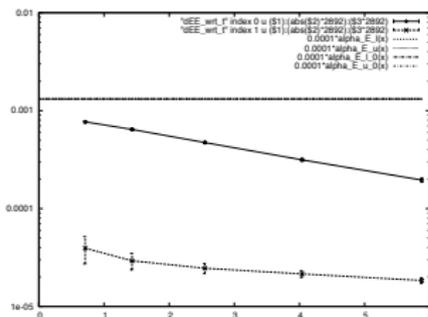
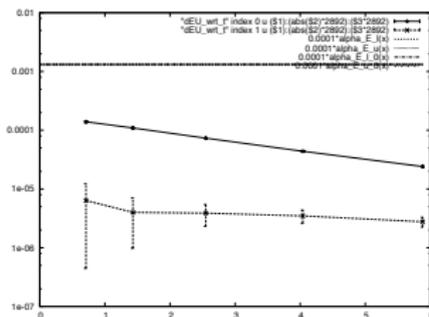
- $E(t, x)$  に関して

$$|\langle \partial_1 E(t, x) U_{01}(t_0, 0) \rangle| \quad |\langle \partial_0 E(t, x) E(t_0, 0) \rangle|$$

および  $t \rightarrow 0$  での漸近的な振る舞い

$$E(t, x) - \langle E(t, x) \rangle \propto \frac{1}{2b_0} \left\{ 1 + 2b_0 s_2 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \right\}$$

の対数プロットは



となる

- 現在の  $t$  の領域では高次の演算子の効果はかなり大きい

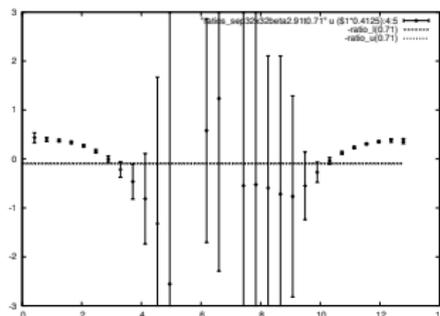
- それでも念のため EMT の保存則を調べてみることにして  $32^4$  格子で  $t/a^2 = 0.71$  の場合に、比

$$\frac{\langle \partial_\mu U_{\mu 0}(t, x) E(t_0, 0) \rangle}{\langle \partial_0 E(t, x) E(t_0, 0) \rangle}$$

ともし保存則が成立すれば期待される比

$$\frac{\frac{b_0}{2} \left[ 1 - 2b_0 s_2 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \right]}{\frac{1}{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2} - 2b_0 s_1}$$

とを  $x = (x_0, 0, 0, 0, 0)$  の関数としてプロットすると



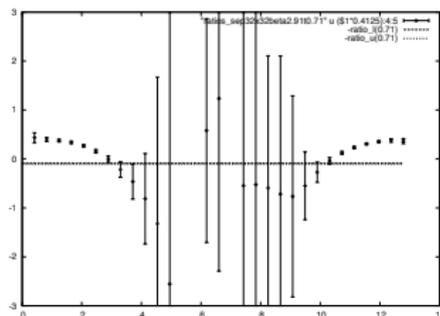
- それでも念のため EMT の保存則を調べてみることにして  $32^4$  格子で  $t/a^2 = 0.71$  の場合に、比

$$\frac{\langle \partial_\mu U_{\mu 0}(t, x) E(t_0, 0) \rangle}{\langle \partial_0 E(t, x) E(t_0, 0) \rangle}$$

ともし保存則が成立すれば期待される比

$$\frac{\frac{b_0}{2} \left[ 1 - 2b_0 s_2 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 \right]}{\frac{1}{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2} - 2b_0 s_1}$$

とを  $x = (x_0, 0, 0, 0)$  の関数としてプロットすると

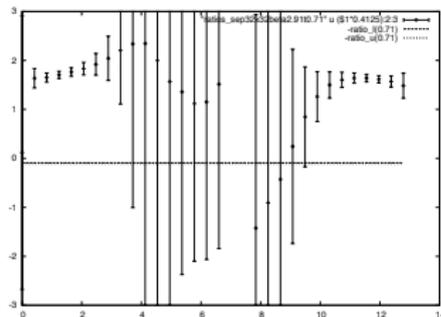


- 何となくよい傾向も見えるが (特に符号に関して) うまくっていない

- 別の相関関数の比

$$\frac{\langle \partial_\mu U_{\mu 1}(t = 0.71 a^2, x) U_{01}(t_0, 0) \rangle}{\langle \partial_1 E(t = 0.71 a^2, x) U_{01}(t_0, 0) \rangle}$$

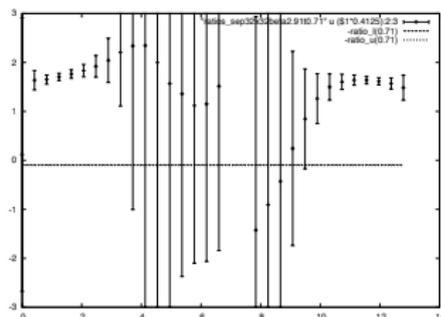
については



- 別の相関関数の比

$$\frac{\langle \partial_\mu U_{\mu 1}(t = 0.71 a^2, x) U_{01}(t_0, 0) \rangle}{\langle \partial_1 E(t = 0.71 a^2, x) U_{01}(t_0, 0) \rangle}$$

については



- やはりうまくいっていない...

- 理論的には正しいはずだ

- 理論的には正しいはずだ
- が、現在のシミュレーションパラメータでは  $t$  が十分小さくなく、理論で無視した  $O(t)$  の効果が大きく効いているようだ

- 理論的には正しいはずだ
- が、現在のシミュレーションパラメータでは  $t$  が十分小さくなく、理論で無視した  $O(t)$  の効果が大きく効いているようだ
- まずは、“tree level  $O(t)$  improvement” を試してみたい：上の表式で

$$G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) \\ \rightarrow G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) - t [D_\sigma D_\sigma G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) + G_{\mu\rho}^a(t, x)D_\rho D_\rho G_{\nu\rho}^a(t, x)]$$

とすれば  $O(t)$  の項は tree level の範囲でキャンセルする。

- 理論的には正しいはずだ
- が、現在のシミュレーションパラメータでは  $t$  が十分小さくなく、理論で無視した  $O(t)$  の効果が大きく効いているようだ
- まずは、"tree level  $O(t)$  improvement" を試してみたい：上の表式で

$$G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) \\ \rightarrow G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) - t [D_\sigma D_\sigma G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) + G_{\mu\rho}^a(t, x)D_\rho D_\rho G_{\nu\rho}^a(t, x)]$$

とすれば  $O(t)$  の項は tree level の範囲でキャンセルする。

- one-loop improvement も不可能ではない（と思う）

- 理論的には正しいはずだ
- が、現在のシミュレーションパラメータでは  $t$  が十分小さくなく、理論で無視した  $O(t)$  の効果が大きく効いているようだ
- まずは、"tree level  $O(t)$  improvement" を試してみたい：上の表式で

$$G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) \\ \rightarrow G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) - t [D_\sigma D_\sigma G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) + G_{\mu\rho}^a(t, x)D_\rho D_\rho G_{\nu\rho}^a(t, x)]$$

とすれば  $O(t)$  の項は tree level の範囲でキャンセルする。

- one-loop improvement も不可能ではない（と思う）
- さらに、brute force で格子をさらに細かく

$$32^4 \rightarrow 48^4 \rightarrow 64^4 \quad t/t_0 \sim 0.12 \rightarrow 0.054 \rightarrow 0.030$$

することでより小さい  $t$  の領域を調査

- 理論的には正しいはずだ
- が、現在のシミュレーションパラメータでは  $t$  が十分小さくなく、理論で無視した  $O(t)$  の効果が大きく効いているようだ
- まずは、"tree level  $O(t)$  improvement" を試してみたい：上の表式で

$$G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) \\ \rightarrow G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) - t [D_\sigma D_\sigma G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) + G_{\mu\rho}^a(t, x)D_\rho D_\rho G_{\nu\rho}^a(t, x)]$$

とすれば  $O(t)$  の項は tree level の範囲でキャンセルする。

- one-loop improvement も不可能ではない（と思う）
- さらに、brute force で格子をさらに細かく

$$32^4 \rightarrow 48^4 \rightarrow 64^4 \quad t/t_0 \sim 0.12 \rightarrow 0.054 \rightarrow 0.030$$

することでより小さい  $t$  の領域を調査

- もしくは、step size scaling のような巧妙な方法が可能か？

- 理論的には正しいはずだ
- が、現在のシミュレーションパラメータでは  $t$  が十分小さくなく、理論で無視した  $O(t)$  の効果が大きく効いているようだ
- まずは、"tree level  $O(t)$  improvement" を試してみたい：上の表式で

$$G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) \\ \rightarrow G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) - t [D_\sigma D_\sigma G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) + G_{\mu\rho}^a(t, x)D_\rho D_\rho G_{\nu\rho}^a(t, x)]$$

とすれば  $O(t)$  の項は tree level の範囲でキャンセルする。

- one-loop improvement も不可能ではない（と思う）
- さらに、brute force で格子をさらに細かく

$$32^4 \rightarrow 48^4 \rightarrow 64^4 \quad t/t_0 \sim 0.12 \rightarrow 0.054 \rightarrow 0.030$$

することでより小さい  $t$  の領域を調査

- もしくは、step size scaling のような巧妙な方法が可能か？
- なんとか EMT の保存則を確認したい

- 理論的研究：より一般の理論への拡張：flow させた物質場は波動関数繰り込みを必要とする (Lüscher (2013))

$$\chi(t, \mathbf{x}) = Z_{\chi}^{-1/2} \chi_R(t, \mathbf{x}), \quad \bar{\chi}(t, \mathbf{x}) = Z_{\chi}^{-1/2} \bar{\chi}_R(t, \mathbf{x})$$

$Z_{\chi}|_{\text{Lattice}}$  の決定を避けるには、演算子を例えば

$$\frac{\bar{\chi}(t, \mathbf{x}) \not{D} \chi(t, \mathbf{x})}{t_0^{3/2} \langle \bar{\chi}(t_0, \mathbf{x}) \chi(t_0, \mathbf{x}) \rangle}$$

のように規格化して定義すればよい ( $t_0$  は任意の flow time で固定)。この組み合わせは次元が 4 の UV 有限量である

# まとめと今後の方向性

- 理論的研究：より一般の理論への拡張：flow させた物質場は波動関数線り込みを必要とする (Lüscher (2013))

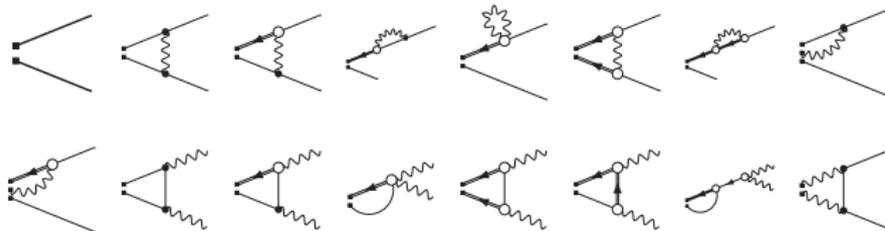
$$\chi(t, x) = Z_X^{-1/2} \chi_R(t, x), \quad \bar{\chi}(t, x) = Z_X^{-1/2} \bar{\chi}_R(t, x)$$

$Z_X|_{\text{Lattice}}$  の決定を避けるには、演算子を例えば

$$\frac{\bar{\chi}(t, x) \mathcal{D}\chi(t, x)}{t_0^{3/2} \langle \bar{\chi}(t_0, x) \chi(t_0, x) \rangle}$$

のように規格化して定義すればよい ( $t_0$  は任意の flow time で固定)。この組み合わせは次元が 4 の UV 有限量である

- 係数関数の摂動論による評価



- 物理への応用? (熱力学量、粘性係数、共型場の理論、ディラトンの物理、真空のエネルギー、...)

- 物理への応用? (熱力学量、粘性係数、共型場の理論、ディラトンの物理、真空のエネルギー、...)
- バルクな熱力学量、例えばいわゆる “trace anomaly”

$$\varepsilon - 3p = -\{T_{\mu\mu}\}_R(x) - \langle -\{T_{\mu\mu}\}_R(x) \rangle$$

やエントロピー密度

$$\varepsilon + p = -\{T_{00}\}_R(x) + \frac{1}{3}\{T_{ii}\}_R(x),$$

に関しては、我々の定義の連続極限は伝統的な方法 (Engels et al. (1982)) と一致するように思われる (要証明)

- 物理への応用? (熱力学量、粘性係数、共型場の理論、ディラトンの物理、真空のエネルギー、...)
- バルクな熱力学量、例えばいわゆる “trace anomaly”

$$\varepsilon - 3p = -\{T_{\mu\mu}\}_R(x) - \langle -\{T_{\mu\mu}\}_R(x) \rangle$$

やエントロピー密度

$$\varepsilon + p = -\{T_{00}\}_R(x) + \frac{1}{3}\{T_{ii}\}_R(x),$$

に関しては、我々の定義の連続極限は伝統的な方法 (Engels et al. (1982)) と一致するように思われる (要証明)

- 同様な方法で、gradient flow からカイラルカレントや SUSY カレントなどが作れないか?