D-braneとGeneralized Geometryと Seiberg-Witten map

Satoshi Watamura

T. Asakawa, H. Muraki, S.W. in preparation,

and also T. Asakawa, S. Sasa, S.W. arXiv: 1204.6964

2013/09/30

Contents

1. Introduction

- ストリングの見る時空の幾何学

1. B場：open string の有効理論の非可換性
2. Flux, nongeometric flux　：　closed string の非可換性, 非結合性

特徴的　T-dualityは？

　これを取り込むにはGeneralized Geometryが適当？

　　　alternative: Double Field Theory, Doubled Geometry

1. Generalized Complex Geometry, Calabi-Yauコンパクト化の解析に有効
2. D-braneの有効理論の特徴づけにも使えそう.

　　DBI作用，Seiberg-Witten map, H-fluxの効果

　　　Non-geometricの意味を探るトレーニング

2. Generalized Geometry

浅川さんがやったので簡単に

- Target space M 上の generalized tangent bundle とは接バンドルと余接バンドルを合わせたもの

$$\mathbb{T}M = TM \oplus T^*M \;\; \to \;\; M$$

- Generalized vector

$$v + \xi \in \Gamma(\mathbb{T}M),\; v \in \Gamma(TM),\; \xi \in \Gamma(T^*M)$$

$$v + \xi = v^M \partial_M + \xi_M dx^M$$

- 内積 $\langle u+\xi, v+\eta \rangle = \frac{1}{2}(\imath_u \eta + \imath_v \xi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u \\ \xi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \eta \end{pmatrix},$

$$O(D,D)$$

- anchor map $\pi : \Gamma(\mathbb{T}M) \to \Gamma(TM)$, $\pi(v+\xi) = v$

- 接空間上のベクトル場は Lie bracket で閉じる
  接ベクトル $\Gamma(TM)$ の代数： Lie algebra
- Anchor map : $a \ : \ E = TM \ \to \ TM$

$$[u, fv] = f[u, v] + (a(u)f)v$$ Lie algebroid

- Generalized tangent vectorには

Lie bracket $\to$ Dorfman bracket

$$[u+\xi, v+\eta] = [u, v] + \mathcal{L}_u\eta - \imath_v d\xi, \qquad \Gamma(\mathbb{T}M)$$

anchor map $\pi : \Gamma(\mathbb{T}M) \to \Gamma(TM)$, $\pi(v+\xi) = v$

Lie algebroid $\to$ Courant algebroid

Courant algebroid の対称性　$\mathbb{T}M$

- Diffeomorphism

  Diff(M): For a diffeo. $f : M \to M$,

  $$u + \xi \mapsto f_*(u) + f^{*-1}(\xi),$$

- B-transformation: For $B \in \Omega^2_{\text{closed}}(M)$,

  $$e^B(u + \xi) \mapsto u + \xi + \imath_u B,$$

  Shift of 1-form

- 一般のB　H-twisted Courant algebroid

まとめ

Differential geometry		Generalized Geometry
TM		$TM \oplus T^*M$
$v = v^M \partial_M$		$v + \xi = v^M \partial_M + \xi_M dx^M$
Lie bracket $[\cdot, \cdot]$	⇒	Dorfman bracket $[\cdot, \cdot]$
Lie algebroid		Courant algebroid
symmetry $\mathsf{Diff}(M)$		$\mathsf{Diff}(M) \ltimes \Omega^2_{\mathsf{closed}}(M)$
generator Lie derivative		Generalized Lie derivative
$\mathcal{L}_v$		$\mathcal{L}_{v+\xi}$

2. D-brane as Dirac structure

- D-brane の幾何学的な特徴づけは Dirac 構造 (Dirac structure) である.

Standard description of D-brane:

D-brane　についてまとめておくと

- Embedding $\varphi \ : \ \Sigma \ni \sigma^a \ \hookrightarrow \ x^M(\sigma) \in M$

D-brane の Fluctuationsは

- Scalar fields Φ^i (in static gauge): transverse displacements
- Gauge fields A_a:

In static gauge: they are function of $x^a = \sigma^a$

Dirac structure

Dirac 構造は次のような性質をもつ　subbundle L

- Isotropic:　$\forall X, Y \in \Gamma(L)\ \ \langle X, Y\rangle = 0$
- Involutive:　Lの切断=generalized vector の Dorfman 括弧が閉じる

　特殊な subbundle in G.G.

- 例

$L = \mathrm{Span}\{\partial_0, \ldots, \partial_p, dx^1 \cdots dx^{D-1}\}$　～flat Dp-brane

$X = \Phi^i \partial_i + A_a dx^a \in L^*$

- Dirac 構造：maximally isotropic, involutiveならば

1. Isotropic $\langle X, Y \rangle = 0$ ならば

$$
\begin{aligned}
[u+\xi, v+\eta] &= [u,v] + \mathcal{L}_u \eta - \imath_v d\xi \\
&= [u,v] + \mathcal{L}_u \eta - \mathcal{L}_v \xi - d\langle u+\xi, v+\eta \rangle
\end{aligned}
$$

Dorfman が Lie bracketになる

２．Maximally とはsubbundleの次元が D

３．Involutive ならば

Dorfman括弧でgeneralized vectorが閉じる.

Courant algebroidがLie algebroidになる.

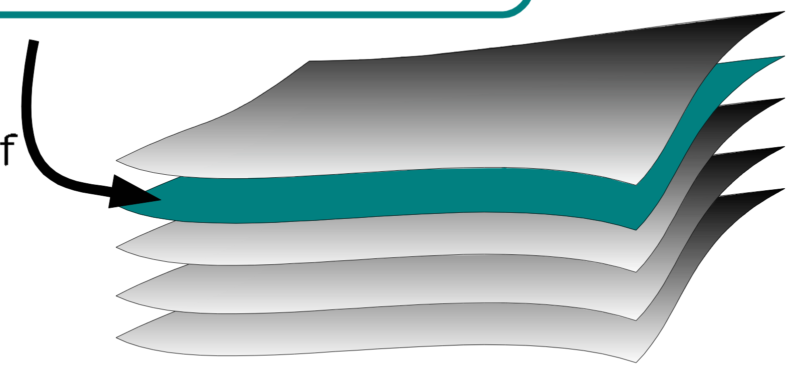
つまりTMの一般化になっている.

(Lie (anti) + anchor+Jacobi)

Geometrical image of D-brane

Static gauge: $\Phi^i(x^a)$ $\quad x^i$ independent

a D-brane = a leaf

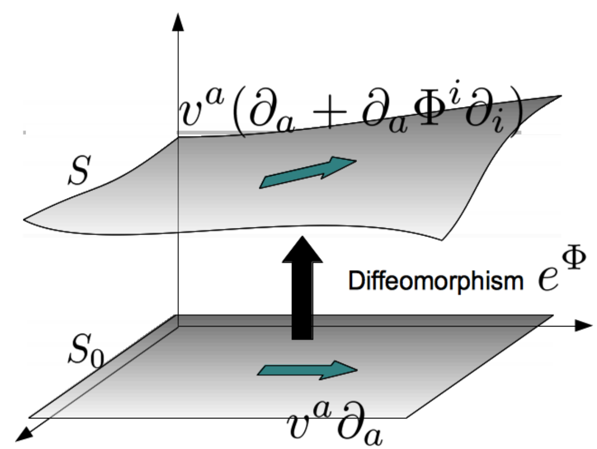


Lie algebroid は foliation を定める

Mathematically, a Lie algebroid (Lie bracket of $v \in \Gamma(TS)$) defines a foliation.

Foliation の一つのleafをD-braneと見る

スカラー場はDiffeoによる接平面の変形と思えるが Static gauge ではM全体で定義された変形と思っても良い。



Fluctuation of D-brane in Ge. Ge.

D-brane = sub-bundle ➡ Dirac structure

Fluctuation を含めてDirac structure

Subbundle $L = \mathrm{span}\{\partial_a, dx^i\} \subset \mathbb{T}M$

そのsection $V_L = v^a(x)\partial_a + \xi_i(x)dx^i \quad \in L.$

Fluctuation $\Phi + A = \Phi^i\partial_i + A_a dx^a in L^*$

Fluctuation $\Phi^i\partial_i$ はDiffeo, 一般にはGeneralized Diffeo.
よって対応したDirac構造は $L_{\mathcal{F}} = e^{-\mathcal{L}_{\Phi+A}} L \subset \mathbb{T}M,$

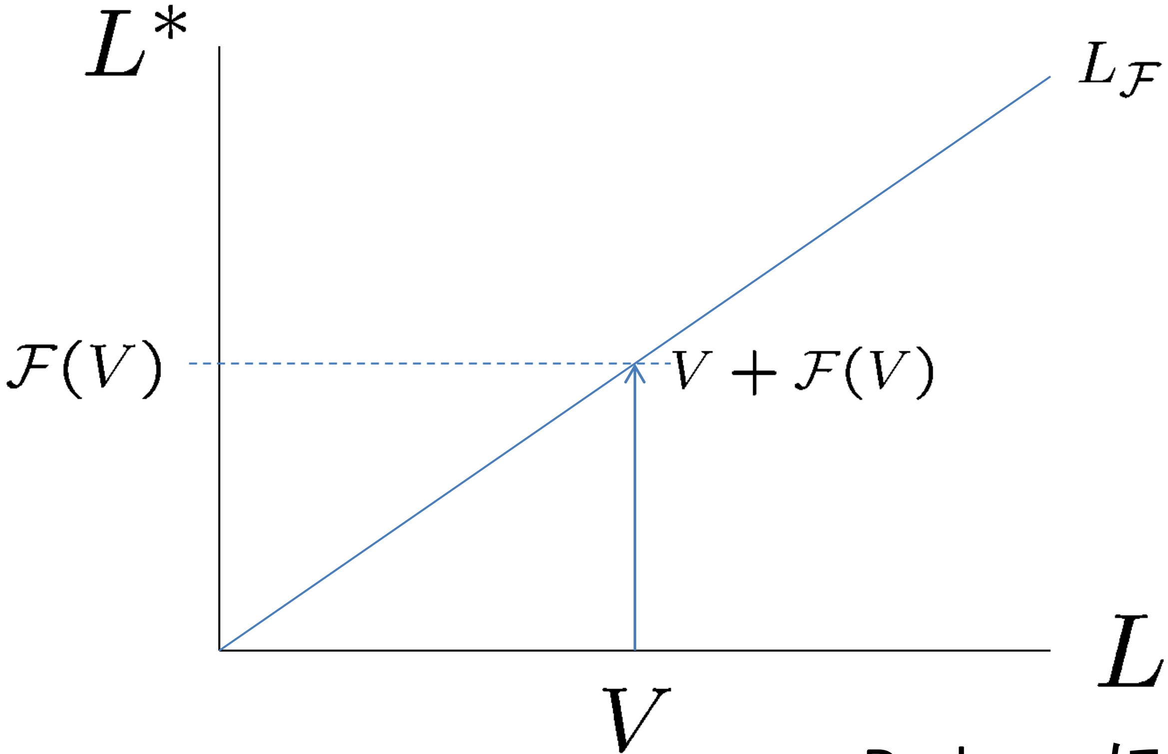
$$L_{\mathcal{F}} \ni V + \mathcal{F}(V) = v^a(x)(\partial_a + \partial_a\Phi^i\partial_i + F_{ab}dx^b) + \xi_i(x)(dx^i - \partial_a\Phi^i dx^a),$$

$$\mathcal{F} = d_L(A + \Phi)$$

$$\mathcal{F} = F_{ab}dx^a \wedge dx^b + \partial_a\Phi^i dx^a \wedge \partial_i \quad \in \Gamma(\wedge^2 L^*),$$

グラフによる表示

Fluctuationを含む
Dirac 構造



Dp-braneに相当するDirac 構造

Symmetry of the Dirac structure

Generalized diffeo.$\mathcal{L}_{\epsilon+\lambda}$, Diffeo.$\ltimes$ B-field gauge transformation:

$$\epsilon = \epsilon_{||} + \epsilon_{\perp} = \epsilon^M \partial_M = \epsilon^a \partial_a + \epsilon^i \partial_i$$
$$\Lambda = \Lambda_{\perp} + \Lambda_{||} = \Lambda_M dx^M = \Lambda_i dx^i + \Lambda_a dx^a.$$

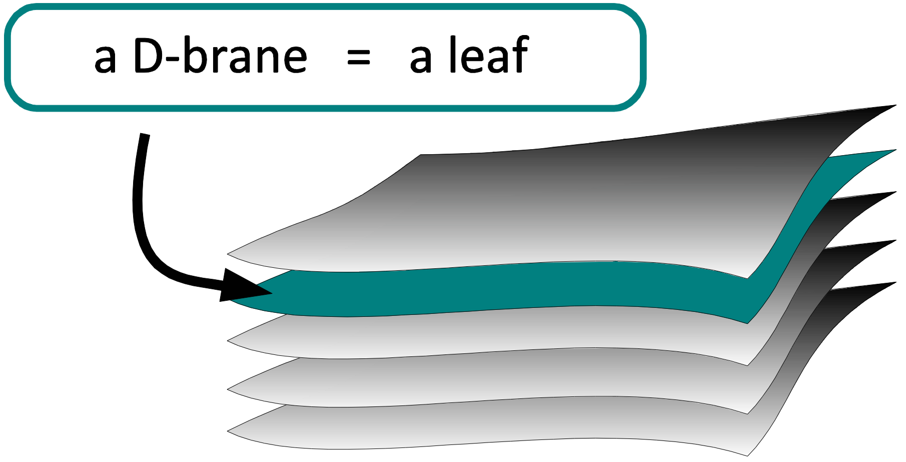
Note that $\epsilon_{||} + \Lambda_{\perp} \in L$ and $\epsilon_{\perp} + \Lambda_{||} \in L^*$.

Symmetry:

1. Generalized Diffeo which preserve foliation:

2. Generalized Diffoe which preserve leaf:

$$L\text{-}Diff \subset F\text{-}Diff$$



Non-linear realization

F-Diff がD-braneの全対称性でfoliationの構造を保つ
D-brane を Leafに置くことによって, 自発的対称性の破れ

F-Diff $\Rightarrow$ L-Diff

がおこり 破れた対称性はNG上でnonlinearに実現される
generalized diffeo. を調べることで変換則(broken part)は

$$\begin{aligned} \delta A_a &= \Lambda_a - \epsilon^c F_{ca} + \Lambda_k \partial_a \Phi^k, \\ \delta \Phi^i &= \epsilon^i - \epsilon^c \partial_c \Phi^i. \end{aligned}$$

ベクトル場も含めてNGボソンと解釈できる

全対称性のもとでの不変性からDBI作用を正しく導くことができる.

3. Dirac structures と SW map

- このようなセットアップで今回はSeiberg-Witten mapについて考えてみたい.

Dirac 構造の異なる表現

Dirac 構造のグラフによる表示を見ると、２通りの表現が可能なことが分かる.

以下では簡単のために基準になるDirac構造としてを考える. (D9-brane) $L=TM$

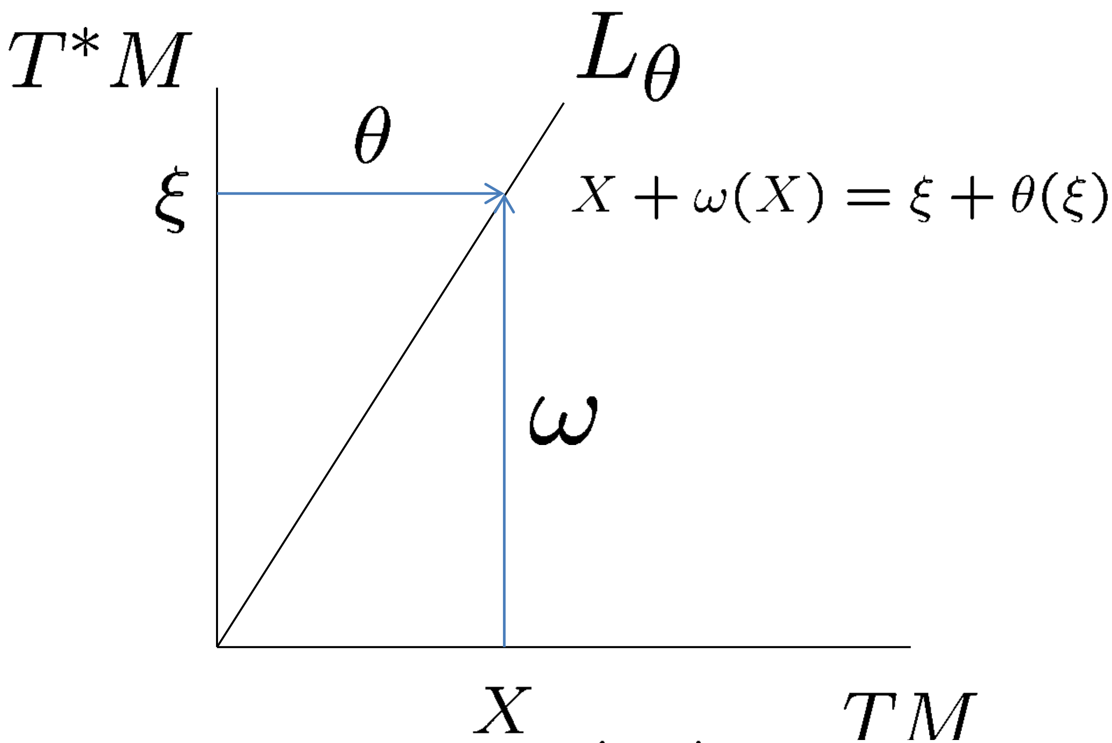
すると2-form $\omega\in\Lambda^2T^*M$ が与えられると

$$L_\omega=\{X+\omega(X)|X\in TM\}$$

がDirac構造になる. ここで ω はBackground でsymplectic とする. すると同じDirac構造が2-vector θ でも表現できる.

Dirac構造の2つの表現をグラフで見ると

$$\theta = \frac{1}{2}\theta^{ij}\partial_i \wedge \partial_j$$



$$\xi = \omega(X) = \omega_{ij} X^j dx^i = -i_X \omega$$

$$X = \theta(\xi) = \theta^{ij}\xi_j \partial_i$$

$$\xi = \omega(\theta(\xi))$$

$$\theta = \omega^{-1}$$

Generalized metric structure

Generalized Geometry では、metricもsubbundleとして特徴づけることができ同時にグラフとして見ることもできる

$$E = g + B \ : \ TM \to T^*M \ : \ X^j \mapsto (g+B)_{ij} X^j$$

このsubbundleは、generalized tangent vectorの中で正の長さを持つようなvectorの集合

$$C_+ = \{V_+ = v + (g+B)(v) \,|\, v \in TM\}, \ , \ \langle V_+, V_+ \rangle = g(v,v) > 0$$

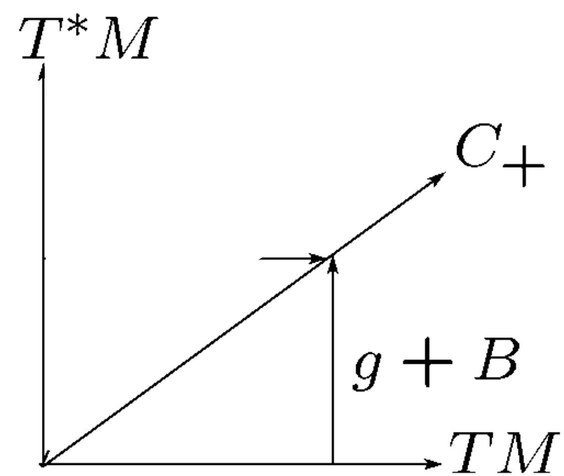
$$C_- = \{V_- = v + (-g+B)(v) \,|\, v \in TM\}, \ , \ \langle V_-, V_- \rangle = -g(v,v) < 0$$

また

$$GV_\pm = \pm V_\pm \ , \quad \text{for} \quad V_\pm \in \Gamma(C_\pm).$$

$$G = \begin{pmatrix} -g^{-1}B & g^{-1} \\ g - Bg^{-1}B & Bg^{-1} \end{pmatrix}$$

$$O(D,D) \ \to \ O(D) \times O(D)$$



このmetric を L_θ から見る

先ほどと同様に

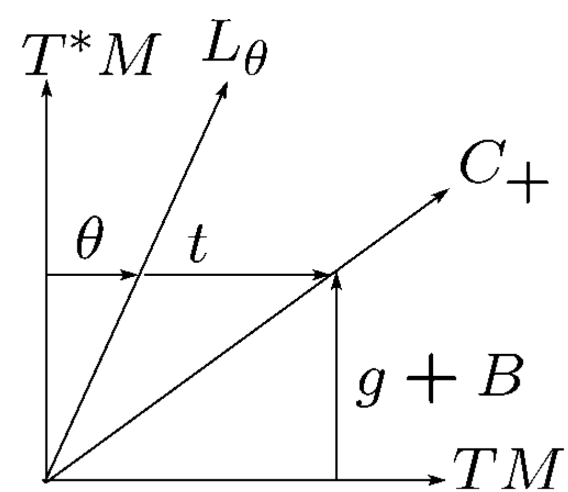
$$\xi + (\theta + t)(\xi) = X + (g + B)(X)$$

よって

$$\theta + t = (g + B)^{-1}$$

ここで t は L_θ からみたmetricと考えるべきなので

$$\theta + \frac{1}{G+\Phi} = \frac{1}{g+B}$$



というSeibergたちの関係式
所謂Open-closed relationを得る.

- Seiberg-Witten map

要請

D-brane上のゲージ場のeffective theory

$$SW \ : \ (A, \lambda, d) \ \to \ (A_*, \lambda_*, d_*)$$

$$F = dA \qquad \Rightarrow \qquad F_* = d_* A_* + A_* \wedge A_*$$

$$\delta A = d\lambda \qquad \qquad \delta A_* = d_* \lambda_* + [A_*, \lambda_*]$$

幾何学的構成

$$(A, \lambda, d) \ \to \ (A_\theta, \lambda_\theta, d_\theta) \ \to \ (A_*, \lambda_*, d_*)$$

classical SW　　　　Formality map

- classical SW map

$$F = dA \qquad \Rightarrow \qquad F_\theta = d_{L_\theta} A_\theta + A_\theta \wedge A_\theta$$

$$\delta A = d\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \delta A_\theta = d_\theta \lambda_\theta + \{A_\theta, \lambda_\theta\}_\theta$$

ここで θ は Poisson bi-vector,

$$\theta = \frac{1}{2}\theta^{ij}\partial_i \wedge \partial_j$$

$$\theta(f,g) = i_{dg} i_{df} \theta = \{f,g\}_\theta$$

ただし $[\theta,\theta]_S = \theta^{i[j}\partial_i \theta^{kl]} = 0$ （Jacobi恒等式）

Poisson bi-vectorがある場合にはそこに異なるタイプの微分代数を定義することができる。

"Poisson differential algebra" (Gerstenhaber alg.)

Poly-vector上の微分形式 GDA　　p-formはp-vector

$$X^i\partial_i \wedge Y^j\partial_j \wedge \cdots \wedge Z^k\partial_k \Rightarrow F^{ij\cdots k}\partial_i \wedge \partial_j \wedge \cdots \wedge \partial_k$$

Differntial 関数の微分を次のように定義する

$$d_\theta\lambda = \theta^{ij}(\partial_j\lambda)\partial_i \qquad d_\theta\lambda(f) = \{f,\lambda\}_\theta$$

$$d_\theta x^j = \theta^{ij}\partial_i \qquad d_\theta\lambda = (\partial_j\lambda)d_\theta x^j$$

関数の微分は1-formでHamiltonian vector 場 に対応

一般の1-formは1-vectorに対応　$a_\theta = \theta^{ij}a_j\partial_i = a_i d_\theta x^i$

p-formの微分は　$d_\theta\omega_\theta = [\omega_\theta, \theta]_S$

特に　$d_\theta\theta = [\theta,\theta]_S = 0 \Rightarrow d_\theta^2 = 0$

例　$d_\theta a_\theta = [a_\theta, \theta]_S = \frac{1}{2}(\partial_i a_j - \partial_j a_i)\theta^{ik}\partial_k \wedge \theta^{jl}\partial_l$

- Moser’s Lemma,

Symmplectic manifold (M,ω) において

$$\omega_t = \omega + tda\ ,\ t = [0,1]$$

の時, $\rho_a^*\omega_1 = \omega_0$ となるdiffeo. ρa が存在する

同様に

$$\theta_t = \theta(1+tf\theta)^{-1}\quad ,\quad f = da$$

$$\dot{\theta}_t = -\theta(1+tf\theta)^{-1}f\theta(1+tf\theta)^{-1} = -\theta_t f\theta_t$$

を満たすflow: $\rho_t^*\theta_t = \theta_0$ が存在する.

Flowは次のりー微分で与えられる.

$$\dot{\theta}_t = -\mathcal{L}_{X_a}\theta_t\ ,\ \omega_t(X_a) = a$$

- SW mapの構成[Wess et al.]

$$A_a = \rho_a^* - id \qquad \rho_a^* = e^{(\partial_t + \mathbf{a}_{\theta_t})} e^{-\partial_t}|_{t=0}$$

$$\rho_{a+d\lambda}^* - \rho_a^* = A_{a+d\lambda} - A_a = \mathbf{d}_\theta \bar{\lambda} \rho_a^*$$

$$\bar{\lambda} = \sum \frac{(\mathbf{a}_{\theta_t} + \partial_t)^n(\lambda)}{(n+1)!}$$

$$\begin{aligned} \rho_{a+d\lambda}^*(f) - \rho_a^*(f) &= \mathbf{d}_\theta \bar{\lambda}(\rho_a^*(f)) = \{\rho_a^*(f), \bar{\lambda}\} \\ &= \mathbf{d}_\theta \bar{\lambda}(f + A(f)) \\ \delta A_a(f) &= \mathbf{d}_\theta \bar{\lambda}(f) + \{A(f), \bar{\lambda}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_\theta(f,g) &= \{\rho^*(f), \rho^*(g)\} - \rho^*\{f,g\} \\ &= d_\theta A(f)(g) - d_\theta A(g)(f) + \{A(f), A(g)\} - A(\{f,g\}) \\ &= (d_{L_\theta} A)(f,g) + \{A(f), A(g)\} \end{aligned}$$

$$F_\theta = F'_{ij} d_\theta x^i \wedge d_\theta x^j \qquad F' = \frac{1}{1+F\theta} F$$

[SW]

- Generalized geometry and Moser's Lemma

fluctuation も2通りの方法で表せる

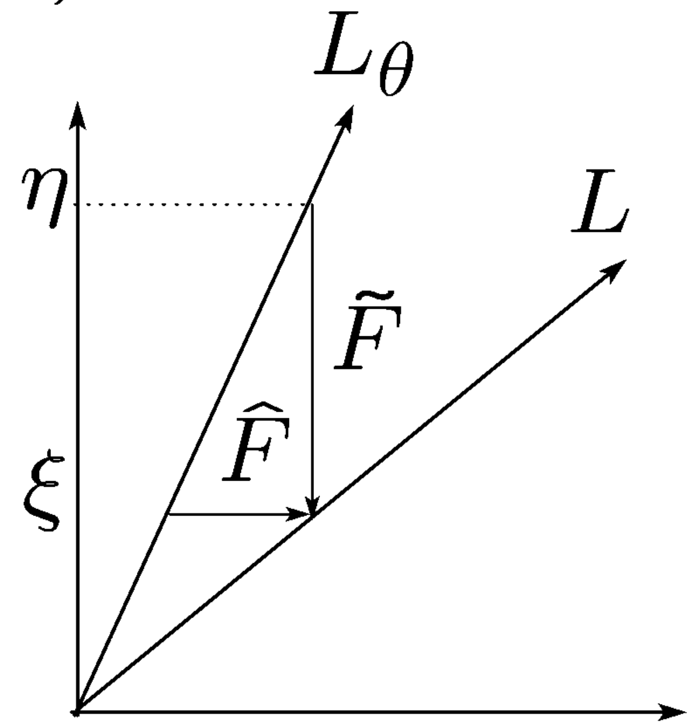
$$\xi + (\theta + \widehat{F})(\xi) = X + (\omega + \tilde{F})(X)$$

$$\theta + \widehat{F} = (\omega + \tilde{F})^{-1} = (1 + \theta\tilde{F})^{-1}\theta$$

$$\widehat{F} = [(1 + \theta\tilde{F})^{-1} - 1]\theta = -(1 + \theta\tilde{F})^{-1}\theta\tilde{F}\theta$$

$$\widehat{F} = \theta F'\theta$$

正しいSWの関係式



微小変換の関係式から、MoserのDiffeo.の満たすべき関係式を求めることができる.

$$R : u + \omega_{t+\delta t}(u) = \xi + \theta_{t+\delta t}(\xi)$$

$$P : \theta_t(\xi) + \xi \quad Q : u + \omega_t(u)$$

この時PQをつなぐ
Generalized diffeoがある

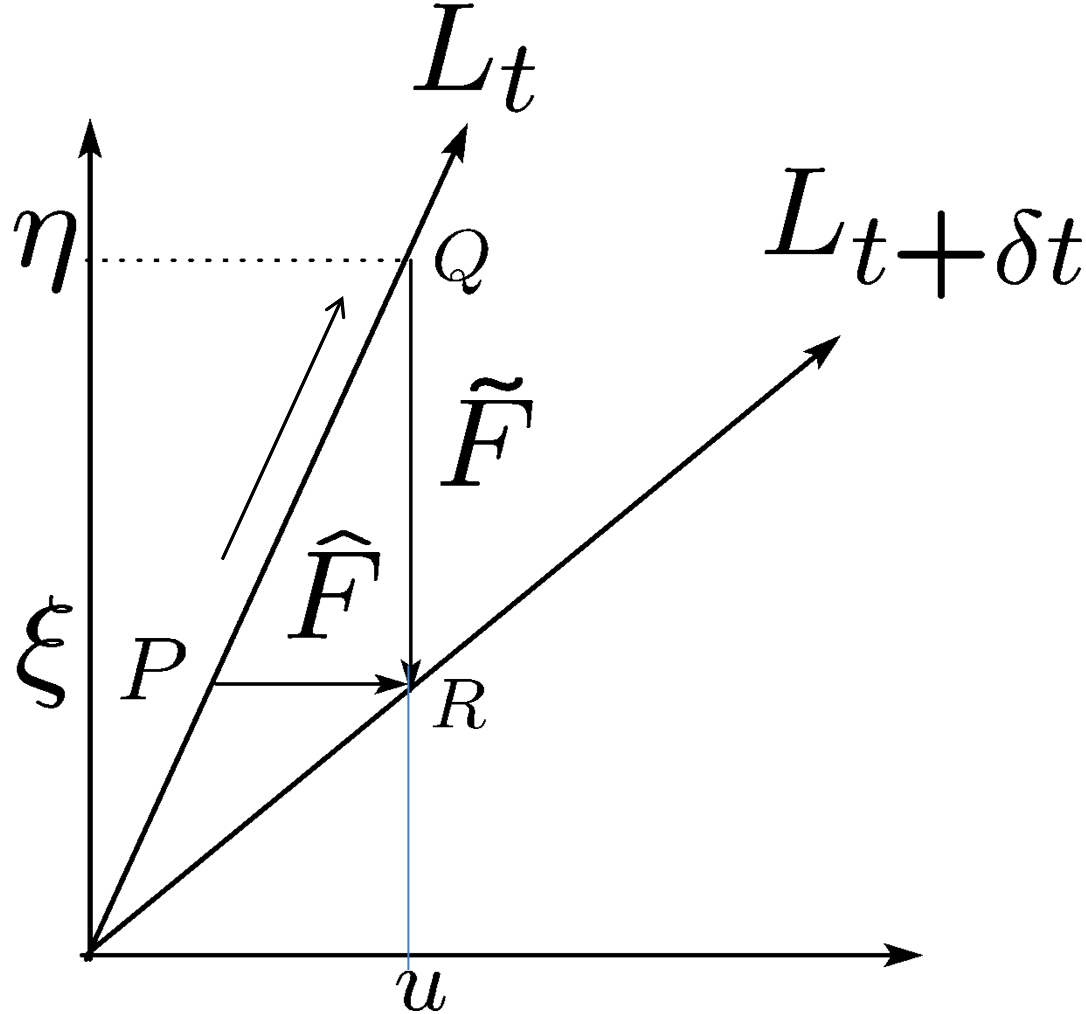
$$\mathcal{L}_{X+\omega_t(X)}$$

$$a + \theta_t(a) = X + \omega_t(X)$$

でaを定義すると

$$\dot{\omega}_t = \mathcal{L}_{\theta_t(a)}\omega_t = da$$

であることが分かる.
これはMoserの式そのものである.



まとめ

Generalized Geometryからは　$\widehat{F} = \theta' - \theta$
が自然なD-braneのFluctuation

しかし, $\widehat{F} = d_\theta \widehat{\Phi}$ と書けることが分かるので基本的にU(1)の
ままである.

これはある意味当然　異なるDirac 構造からbraneのfluctuation
を記述しただけなので，U(1)ゲージ対称性が現れた.

一方，このゲージ理論はpoisson algebroid 上のテンソルとして
書かれている．つまり, R-fluxと同様のpoisson的2-flux，2vector
としてゲージ理論を記述している.

一方 $F_\theta = \rho^*(\theta' - \theta)$ の意味は不明

Dirac構造 $L = T^*M$ からの変形として L_θ を構成している.
今の理解ではT*Mは、D-instantonに対応している.
そこで, L_θ をD-instantonの言葉で見直すことができれば本当のSW-mapとの関係が見えるのではと思われる.

このためにはmulti-D-braneの構成が必要になる.

一方これができれば, multi-D-braneのDBI作用が書けることになる.

H-twist を考えることは可能.
R-twistはどうか？