

## 問題

一様でランダムな  $SU(N)$  行列の生成方法を教えてください。特に、 $N$  は特定の整数ではなく一般の整数の場合、つまり、 $N = 2, 3, 4, \dots$  の時のランダムな  $SU(N)$  行列生成法が知りたいです。生成された行列は群の一様な積分測度である Haar 測度の基本的な性質を満足するようになってもらいたいです。

## 回答

以下のアルゴリズムでランダムな  $SU(N)$  行列  $U_s$  が生成できます。

1. 正規乱数を使用して  $N \times N$  の複素行列  $A$  を作成する。
2. Householder 法などを利用して QR 分解をする

$$A = QR.$$

3.  $R$  の対角成分を規格化したものを要素とする対角行列  $\Lambda$  をつくる

$$\Lambda_{ij} = \begin{cases} R_{ij}/|R_{ij}| & (i = j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$

4.  $U = Q\Lambda$  を計算して Unitary 行列  $U$  を作成する。
5.  $U$  の行列式  $d$  を計算し、規格化する

$$d = \det(U), \\ U_s = U/d^{1/N}.$$

複素行列  $A$  から Unitary 行列  $U$  を生成する際には Gram-Schmidt の正規直交化でも可能ですが、丸め誤差により不安定になります。そのため、Householder 法などの QR 分解を利用した上記の方法をおすすめします。ランダムな  $U(N)$  の行列の生成方法についてまとめた [1] が参考になると思います。

## 参考文献

- [1] F. Mezzadri. “How to Generate Random Matrices from the Classical Compact Groups”. arXiv:math-ph/0609050, Notices of the AMS 54 (2007), 592-604.