

硬い微分方程式を解くためにいろいろな数値的方法が考案されていますが、陰的な多段階法を用いることが主流のようです。陰的とは、数値的に解く際の k 番目の変数 t_k に対する関数の値を求めるのに、ある関数方程式の根を数値的に求める必要がある方法のことで、多段階法とは、一段階法のアウトプットをインプットとして用いる方法です。それらの数値的方法について、

E.ハイラー、G.ヴァンナー、常微分方程式の数値的解法 1 基礎編、2 発展編に、たいへん詳しい研究が示されています。

最も興味深いのは、II 巻 V.5 節にあります数値実験結果で、10 ほどの問題が 4 つのサブルーチンを用いて解かれており、その計算時間と精度の関係が図 5. 1 と 5. 2 に示されています。それを見ますと、LSODE が秀逸であることがわかります。このサブルーチンは Backward differential (BDF)法を用いており、この方法は、硬い線形微分方程式

$$u' = au + f(t),$$

(a は 1 より絶対値がずっと大きい負の定数) に適用したとき、 t のステップ幅を (おもしろいことに) 十分大きくとると、誤差がある定数以下になることが解析的に保証されることです。(G. Sewell, “The Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equation”, Academic press, San Diego, 1988 参照。) これに加えて、LSODE は硬いときと硬くないときで方法を使い分けていること、ステップ幅を自動的に計算しているということから、現在入手可能な常微分方程式の汎用解法ルーチンのなかで最良のもののひとつと思われる。

LSODE に匹敵するものを探すとすれば、IV.10 節の数値実験に示されている RADAU5 ではないかと思います。図 10. 8、10. 9 をご覧ください。このコードは、陰的 Runge-Kutta 法を用いており、

<http://www.unige.ch/~hairer/software.html>

からダウンロード可能です。LSODE と RADAU5 を試せば、最良のものを試したことになるのではないかと思います。