多倍長計算手法

平成26年度第2四半期

目次

1.はじめに

数値積分では,積分計算そのものにデータ形式に依存するものがあり、また数学的には発散する積分値列をある範囲内でしか適用できないものがあります。この資料ではこれらをまとめた結果を記載しています。
また量子モンテカルロ法によるスペクトル計算で物理的に有効とするためにはパラメータの設定である条件がつきます。この条件下ではIeee754-2008データ形式での限界が存在します。前四半期では実行時間の関係で粒子数N=20としていましたが,本来のN=100での計算を実施し,N=20との差を求めました。

2.数値積分の注意事項

物理,数学と計算機シュミレーションには以下の
差が生じます。
端点特異点が有り、積分値が有限の場合

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$ この場合,計算機による結果の精度

は,積分区間$[\varepsilon,1]$のεの値に依存します。

$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty$ この場合,端点特異点が有り、積分値が無限ですが

計算機による結果は有限値で積分区間$[\varepsilon,1]$の$\log(\frac{1}{\varepsilon})$

となります.(相対誤差1%以下).

$I = \int_0^1 \frac{1}{xM^2 + (1-x)\lambda^2} dx = \frac{1}{M^2 - \lambda^2} \log(\frac{M^2}{\lambda^2})$の計算は

計算機による結果は,積分区間$[\varepsilon,1-\varepsilon]$の$\varepsilon$の値に依存し

精度の良い結果を得るには$\varepsilon << \frac{M^2}{\lambda^2}$が必要となります。

相対誤差は$I_0 = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{xM^2 + (1-x)\lambda^2} dx = \frac{1}{M^2 - \lambda^2} \log(\frac{M^2}{(M^2 - \lambda^2)\varepsilon + \lambda^2})$

とIの値から求まります。

$\lambda = 0$では,$\frac{1}{M^2} \log(\frac{1}{\varepsilon})$

$\lambda \neq 0$では$\frac{|I_0 - I|}{|I|} = \frac{\log(1 - \varepsilon + \frac{M^2}{\lambda^2}\varepsilon)}{\log(\frac{M^2}{\lambda^2})} \fallingdotseq \frac{\frac{M^2}{\lambda^2}\varepsilon}{\log(\frac{M^2}{\lambda^2})}$

$M = 100, \lambda = 10^{-30}, \varepsilon = 10^{-75}$で相対誤差$6.8 \times 10^{-14}$

$\varepsilon = 10^{-64}$で相対誤差0.0047,$\varepsilon = 10^{-60}$で相対誤差0.0625

となります。

いくつかの計算例をこの後に記しました。

数値積分計算

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \infty$$

変数変換区間 $[\varepsilon, 1-2^{-113}]$

$\varepsilon = 10^{-n}$

相対誤差：積分値と $\log(\frac{1}{\varepsilon})$

n	値	相対誤差
10	0.23340708666709720 8D+02	0.7842D-02
20	0.46574912272268235 9D+02	0.7790D-02
30	0.69961410879386079 3D+02	0.7780D-02
40	0.92703901143453599 6D+02	0.7776D-02
50	0.11538360299687017 6D+03	0.7775D-02
60	0.13918725675724170 9D+03	0.7774D-02
70	0.16273195084578850 8D+03	0.7773D-02
80	0.18440325840419549 8D+03	0.7773D-02
90	0.20895962052361714 7D+03	0.7773D-02
100	0.23311388985960551 3D+03	0.7773D-02

数値積分計算

$$\int_0^1 \frac{1}{xM^2+(1-x)\lambda^2}dx = \frac{1}{(M^2-\lambda^2)}\log\left(\frac{M^2}{\lambda^2}\right)$$

$\lambda = 10^{-m}$, 変数変換区間 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$

$\varepsilon = 10^{-n}, h = 0.5^6, M = 100$

	m=30	
n	0.147365445951618924Q−01	相対誤差
10	0.231574255058770234Q−02	0.8429Q+00
20	0.462116366109607907Q−02	0.6864Q+00
30	0.694164160806739548Q−02	0.5290Q+00
40	0.919820579107975093Q−02	0.3758Q+00
50	0.114485346609728248Q−01	0.2231Q+00
60	0.138103737135693498Q−01	0.6285Q−01
70	0.147363376638424290Q−01	0.1404Q−04
80	0.147363377222335175Q−01	0.1404Q−04
90	0.147363377222335175Q−01	0.1404Q−04
100	0.147363377222335175Q−01	0.1404Q−04

数値積分計算

$$\int_0^1 \frac{1}{xM^2+(1-x)\lambda^2}dx = \frac{1}{(M^2-\lambda^2)}\log\left(\frac{M^2}{\lambda^2}\right)$$

$\lambda = 10^{-m}$, 変数変換区間 $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$

$\varepsilon = 10^{-n}, h = 0.5^7, M = 100$

	m=30	
n	0.147365445951618924Q−01	相対誤差
10	0.232490670862570827Q−02	0.8422Q+00
20	0.463932744416145133Q−02	0.6852Q+00
30	0.696889134800300170Q−02	0.5271Q+00
40	0.923429795271255545Q−02	0.3734Q+00
50	0.114934474803299206Q−01	0.2201Q+00
60	0.138645380792536845Q−01	0.5917Q−01
70	0.147365445968630811Q−01	0.1154Q−09
80	0.147365446342540534Q−01	0.2653Q−08
90	0.147365446342540535Q−01	0.2653Q−08
100	0.147365446342540535Q−01	0.2653Q−08

数値積分計算

$$\int_0^1 \frac{1}{xM^2 + (1-x)\lambda^2} dx = \frac{1}{(M^2 - \lambda^2)} \log(\frac{M^2}{\lambda^2})$$

$\lambda = 10^{-m}$, **変数変換区間** $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$

$\varepsilon = 10^{-n}, h = 0.5^8, M = 100$

	m=30	
n	0.147365445951618924Q−01	相対誤差
10	0.232949769142978581Q−02	0.8419Q+00
20	0.464842710263577845Q−02	0.6846Q+00
30	0.698254290616501867Q−02	0.5262Q+00
40	0.925237939730574551Q−02	0.3721Q+00
50	0.115159479054159220Q−01	0.2185Q+00
60	0.138916715932203850Q−01	0.5733Q−01
70	0.147365445665596625Q−01	0.1941Q−08
80	0.147365445951618909Q−01	0.9727Q−16
90	0.147365445951618910Q−01	0.9649Q−16
100	0.147365445951618910Q−01	0.9649Q−16

数値積分計算

$$\int_0^1 \frac{1}{xM^2 + (1-x)\lambda^2} dx = \frac{1}{(M^2 - \lambda^2)} \log(\frac{M^2}{\lambda^2})$$

$\lambda = 10^{-m}$, **変数変換区間** $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$

$\varepsilon = 10^{-n}, h = 0.5^9, M = 100$

	m=30	
n	0.147365445951618924Q−01	相対誤差
10	0.233179540879295303Q−02	0.8418Q+00
20	0.465298137363800405Q−02	0.6843Q+00
30	0.698937535733912137Q−02	0.5257Q+00
40	0.926142896060555719Q−02	0.3715Q+00
50	0.115272091218842446Q−01	0.2178Q+00
60	0.139052511237161374Q−01	0.5641Q−01
70	0.147365445704516375Q−01	0.1677Q−08
80	0.147365445951618924Q−01	0.6627Q−18
90	0.147365445951618924Q−01	0.1458Q−28
100	0.147365445951618924Q−01	0.1470Q−30

数値積分計算

$$\int_0^1 \frac{1}{xM^2+(1-x)\lambda^2}dx = \frac{1}{(M^2-\lambda^2)}\log(\frac{M^2}{\lambda^2})$$

$\lambda = 10^{-m}$, **変数変換区間** $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$

$\varepsilon = 10^{-n}, h = 0.5^{10}, M = 100$

	m=30	
n	0.147365445951618924Q−01	相対誤差
10	0.233294482396574749Q−02	0.8417Q+00
20	0.465525961958223562Q−02	0.6841Q+00
30	0.699279325095223009Q−02	0.5255Q+00
40	0.926595595250995594Q−02	0.3712Q+00
50	0.115328424811043277Q−01	0.2174Q+00
60	0.139120440781553936Q−01	0.5595Q−01
70	0.147365445722666186Q−01	0.1554Q−08
80	0.147365445951618924Q−01	0.6081Q−18
90	0.147365445951618924Q−01	0.1329Q−28
100	0.147365445951618924Q−01	0.1960Q−31

以上の例から$h = 0.5^6, \lambda = 10^{-30}$**の場合**$\varepsilon = 10^{-100}$**程度必要になります。これは一次元の例ですが多次元や被積分関数が**$\frac{1}{D^n}$**の場合**, dd**形式(指数部**11**ビット)では**, $\varepsilon = 10^{-50}$**程度しか取れない場合が多々発生します。**

3.3次元反復法の反復回数

問題は3次元ポアソン方程式

$$\Delta u + R\frac{\partial u}{\partial x} = -f$$

領域$[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$

解析解$u(x,y,z) = e^{xyz}\times\sin(\pi x)\times\sin(\pi y)\times\sin(\pi z)$

非対称問題。

解法

bcg(biconjugate gradient)法

$R = 100, nx = ny = nz = 129$

cgs(conjugate gradient square)法

$R = 100, nx = ny = nz = 113$

収束判定値は共役残差10^{-12}

初期値$u(x,y,z) = 0$

反復回数10000まででは、
bcg法は倍精度演算,
cgs法は4倍精度演算まで収束しません。

3.1 bcg法

bcg法反復回数一覧

演算精度	SR16000	x5570	E5-2670	Phi5110P
3倍精度		482		
4倍精度	316	308	308	314
5倍精度		317		
6倍精度		317		
7倍精度		317		
8倍精度		317		

性能面からは4倍精度演算が最も適していると言えます。

3.2　cgs法

cgs法反復回数一覧表

演算精度	SR16000	x5570	E5-2670	Phi5110P
5倍精度		373	368	368
6倍精度	281	237	240	240
7倍精度		217	217	217
8倍精度	217	217	217	217

(注)

1.赤字はその計算機で最も性能がよかったもの。

2.6倍精度の有効ビット数はSR16000は
159ビット, 他は177ビット

3.E5－2670, Phi5110Pでは内積部分に
無限精度演算を適用しています。

性能面からは6倍精度演算が最も適していると言えます。

4.Hadamard積分

ループ積分では内部特異点がある場合と端点特異点が
ある場合があるが,両方含む場合の計算は以下の資料をもとに
問題を作成し精度の検証を行った。

数理解析研究所講究録第791巻
1992年206－219
Hadamard有限部分積分に対するDE公式
緒方秀教,杉原正顯,森正武:東京大学工学部物理工学科
P.215

$$f.p.\int_{-1}^{1}\frac{F(x)}{(x-\lambda)^2}dx,\ F(z)=(1-z)^{\frac{1}{4}}(1+z)^{\frac{-1}{4}} \qquad (46)$$

$$\text{厳密値}=-\frac{\pi}{2}(1+\lambda)^{\frac{-5}{4}}(1-\lambda)^{\frac{-3}{4}} \qquad (47)$$

を変形し,
端点$(x=0 \text{ or } x=1)$と内部特異点を持つ例題を作成して
DE＋eps算法を検証しました。
厳密値の計算は以下のとうり。

$$F_1(z)=z^{\frac{-1}{n}}(1-z)^{\frac{1}{n}} \qquad t=\left(\frac{1-z}{z}\right)^{\frac{1}{n}},\ c=\frac{1-\lambda}{\lambda}$$

$$F_2(z)=z^{\frac{1}{n}}(1-z)^{\frac{-1}{n}} \qquad t=\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{1}{n}},\ c=\frac{\lambda}{1-\lambda}$$

とすると,

$$I_1=\int_0^1\frac{F_1(x)}{(x-\lambda)^2}dx=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty\frac{1}{t^n-c}dt$$

$$I_2=\int_0^1\frac{F_2(x)}{(x-\lambda)^2}dx=\frac{1}{(1-\lambda)^2}\int_0^\infty\frac{1}{t^n-c}dt$$

$n=2$の場合$\int_0^\infty\frac{1}{t^n-c}dt=0$から$I_1=I_2=0$

$n=3$の場合$\int_0^\infty\frac{1}{t^n-c}dt=\frac{1}{c^{\frac{2}{3}}}\int_0^\infty\frac{1}{t^3-c}dt=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\frac{1}{c^{\frac{2}{3}}}$

$n=4$の場合$\int_0^\infty\frac{1}{t^n-c}dt=\frac{-1}{2c^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty\frac{1}{t^4-c}dt=-\frac{\pi}{4}\frac{1}{c^{\frac{3}{4}}}$

厳密解の計算例

$$I_2=\int_0^1\frac{(1-x)^{\frac{-1}{4}}x^{\frac{1}{4}}}{(x-\lambda)^2}dx$$

$$t=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}},x=\frac{t^4}{t^4+1},dx=\frac{4t^3}{(t^4+1)^2}$$

$x-\lambda=\dfrac{(1-\lambda)t^4-\lambda}{t^4+1}$ より

$$I_2=\int_0^\infty\frac{4t^4}{((1-\lambda)t^4-\lambda)^2}dt=\frac{1}{(1-\lambda)^2}\int_0^\infty\frac{4t^4}{(t^4-c)^2}dt\quad (c=\frac{\lambda}{1-\lambda})$$

$$E=\int_0^\infty\frac{4t^4}{(t^4-c)^2}dt=\int_0^\infty\frac{4}{(t^4-c)}dt+\int_0^\infty\frac{4c}{(t^4-c)^2}dt$$

$\displaystyle\int\frac{1}{(t^4-c)^2}dt=\frac{-t}{4c(t^4-c)}-\frac{3}{4c}\int\frac{1}{t^4-c}dt$ から

$$E=\frac{-t}{t^4-c}\Big|_{t=0}^{t=\infty}+\int_0^\infty\frac{1}{t^4-c}dt=\int_0^\infty\frac{1}{t^4-c}dt$$

$\displaystyle I_1=\int_0^1\frac{(1-x)^{\frac{1}{4}}x^{\frac{-1}{4}}}{(x-\lambda)^2}dx$ でも,

$$t=\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{1}{4}},x=\frac{1}{t^4+1},dx=-\frac{4t^3}{(t^4+1)^2}$$

$x-\lambda=\dfrac{-\lambda(t^4+1)+1}{t^4+1}$ より

$\displaystyle I_1=\int_0^\infty\frac{4t^4}{(1-\lambda t^4-\lambda)^2}dt=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty\frac{4t^4}{(t^4-c)^2}dt\quad (c=\frac{1-\lambda}{\lambda})$ となり,

I_1,I_2 はともに E を計算すれば良い事になります。

$$E=\int_0^\infty\frac{1}{t^4-c}dt=\frac{1}{2\sqrt{c}}\left[\int_0^\infty\frac{1}{t^2-\sqrt{c}}dt-\int_0^\infty\frac{1}{t^2+\sqrt{c}}dt\right]=-\frac{1}{2\sqrt{c}}\int_0^\infty\frac{1}{t^2+\sqrt{c}}dt$$

$t=c^{\frac{1}{4}}y,dt=c^{\frac{1}{4}}dy$ から $\displaystyle E=-\frac{1}{2\sqrt{c}}\int_0^\infty\frac{1}{c^{\frac{1}{4}}(y^2+1)}dy=-\frac{\pi}{4c^{\frac{3}{4}}}.$

これから

$I_1=-\dfrac{\pi}{4}\lambda^{\frac{-5}{4}}(1-\lambda)^{\frac{-3}{4}},I_2=-\dfrac{\pi}{4}\lambda^{\frac{-3}{4}}(1-\lambda)^{\frac{-5}{4}}$ となります。

より一般のnに対して厳密解を求める場合は以下の計算を使用できます。

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^n-1}dt = -\frac{\pi}{n}\cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (n \geq 2)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^n-c}dt = \frac{c^{\frac{1}{n}}}{c}\int_0^\infty \frac{1}{y^n-1}dy = -c^{1-\frac{1}{n}}\frac{\pi}{n}\cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (n \geq 2)$$

$$y = \frac{t}{c^{\frac{1}{n}}}, dy = \frac{1}{c^{\frac{1}{n}}}dt, t^n - c = c(y^n-1)$$

テストしたのは,以下の8ケースで良い結果が得られています。

例題

$$f.p.\int_{-1}^{1} \frac{F(x)}{(x-\lambda)^2}dx, F(z) = (1-z)^{\frac{1}{4}}(1+z)^{\frac{-1}{4}}$$

$$\textbf{厳密値} = -\frac{\pi}{2}(1+\lambda)^{\frac{-5}{4}}(1-\lambda)^{\frac{-3}{4}}$$

ex : 25 -0.1570797130571282Q+01 0.954Q-05

ramda = 0.999999999999999999999999999999999605E-030

kai = -1.5707963267948966192313216916389764

例題2

$$\mathrm{f.p.}\int_{-1}^{1}\frac{F(x)}{(x-\lambda)^2}dx,\ F(z)=(1-z)^{\frac{1}{4}}(1+z)^{\frac{-1}{4}}$$

厳密値 $= -\dfrac{\pi}{2}(1+\lambda)^{\frac{-5}{4}}(1-\lambda)^{\frac{-3}{4}}$

変数変換 $t=\dfrac{1}{2}(x+1)$ **で**

$$2\times \mathrm{f.p.}\int_{0}^{1}\frac{F(x)}{(2x-1-\lambda)^2}dx,\ F(z)=(1-z)^{\frac{1}{4}}z^{\frac{-1}{4}}$$

厳密値 $= -\dfrac{\pi}{2}(1+\lambda)^{\frac{-5}{4}}(1-\lambda)^{\frac{-3}{4}}$

ex : 35 -0.1570796327089221Q+01 0.603Q-09

ramda = 0.999999999999999999999999999999999605E-030

kai = -1.5707963267948966192313216916389764

例題3

$$\mathrm{f.p.}\int_0^1 \frac{F(x)}{(x-\lambda)^2}dx, F(z)=(1-z)^{\frac{1}{4}}z^{\frac{-1}{4}}$$

$$\textbf{厳密値}=-\frac{\pi}{4}\lambda^{\frac{-5}{4}}(1-\lambda)^{\frac{-3}{4}}$$

$\mathrm{ex}:\ 35\ \ \text{-}0.1511499660473267\mathrm{Q}+02\ \ \ 0.100\mathrm{Q}\text{-}04$

$\mathrm{ramda}=\ 0.99999999999999999999999999999999692\mathrm{E}\text{-}001$

$\mathrm{kai}\ \ =\ \text{-}15.114994701951815421617318813684932$

例題4

$$\mathrm{f.p.}\int_0^1 \frac{F(x)}{(x-\lambda)^2}dx, F(z)=(1-z)^{-\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}$$

$$\textbf{厳密値}=-\frac{\pi}{4}\lambda^{\frac{-3}{4}}(1-\lambda)^{\frac{-5}{4}}$$

$\mathrm{ex}:\ 35\ \ \text{-}0.1511499660473267\mathrm{Q}+02\ \ \ 0.100\mathrm{Q}\text{-}04$

$\mathrm{ramda}=\ 0.89999999999999999999999999999999877$

$\mathrm{kai}\ \ =\ \text{-}15.114994701951815421617318813685031$

例題5

$$f.p.\int_0^1 \frac{F(x)}{(x-\lambda)^2}dx, F(z)=(1-z)^{\frac{1}{3}} z^{\frac{-1}{3}}$$

$$\textbf{厳密値} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \lambda^{\frac{-4}{3}} (1-\lambda)^{\frac{-2}{3}}$$

ex : 35 -0.1397353864686661Q+02 0.107Q-04

ramda = 0.99999999999999999999999999999999692E-001

kai = -13.973535984464536977830852668014869

例題6

$$f.p.\int_0^1 \frac{F(x)}{(x-\lambda)^2}dx, F(z)=(1-z)^{\frac{-1}{3}} z^{\frac{1}{3}}$$

$$\textbf{厳密値} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \lambda^{\frac{-2}{3}} (1-\lambda)^{\frac{-4}{3}}$$

ex : 35 -0.1397353864686661Q+02 0.107Q-04

ramda = 0.89999999999999999999999999999999877

kai = -13.973535984464536977830852668014277

例題7

$$\mathrm{f.p.}\int_0^1 \frac{F(x)}{(x-\lambda)^2}dx,\ F(z)=(1-z)^{\frac{1}{2}}z^{\frac{-1}{2}}$$

厳密値 $=0$

ex : 35 0.14046249340409962Q - 08 0.723Q - 08

ramda = 0.99999999999999999999999999999999692E - 001

kai = 0.00000000000000000000000000000000000E + 000

例題8

$$\mathrm{f.p.}\int_0^1 \frac{F(x)}{(x-\lambda)^2}dx,\ F(z)=(1-z)^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$$

厳密値 $=0$

ex : 35 0.14046249338430097Q - 08 0.723Q - 08

ramda = 0.89999999999999999999999999999999877

kai = 0.00000000000000000000000000000000000E + 000

5.量子モンテカルロ法による物性スペクトル計算

量子モンテカルロ法では,安定した計算を行うにはLは$L = 20 \times \beta$の関係が満たされている事が必要になります。

$U = 10$ではプログラムを実行中に変数がとる値の最大値は$e^{\sqrt{200 \times \beta}}$となり,指数部が11ビットだと$\beta < 50.14$,15ビットだと$\beta < 802.978$となります。

また粒子数Nは100程度が必要となります。

5.1 指数部が11ビットの限界について

量子モンテカルロ法

$\beta =$ **可変**$, L = 20 \times \beta, U = 10$

倍精度の最大値 $1.7976931348623157E+0308$

```
l =        980
beta =   49.000000000000000000000000000000

ispin =          1
QDR  =  1.785864139172194426883476026500380E+0303
I + QDR =  1.785864139172194426883476026500380E+0303

ispin =          2
QDR  =  1.016926695260681160826110539840909E+0304
I + QDR =  1.016926695260681160826110539840909E+0304
l =       1000
beta =   50.000000000000000000000000000000

spin =          1
QDR  =  2.862712242794756891557352959861312E+0309
I + QDR =  2.862712242794756891557352959861312E+0309

ispin =          2
QDR  =  1.651604970572476540194914368437567E+0310
I + QDR =  1.651604970572476540194914368437567E+0310
```

$\beta = 49.6 \quad \text{OK}, \beta = 49.7 \quad \text{NG}$

```
l =        992
beta =   49.60000000000000000000000000000000

ispin =          1
QDR  =  9.436165589130513054255944449201070E + 0306
I + QDR =  9.436165589130513054255944449201070E + 0306

ispin =          2
QDR  =  5.415677874136262454106581048120274E + 0307
I + QDR =  5.415677874136262454106581048120274E + 0307

l =        994
beta = 49.70000000000000000000000000000000

ispin =          1
QDR  =  3.938127827940264707461183253762617E + 0307
I + QDR =  3.938127827940264707461183253762617E + 0307

ispin =          2
QDR  =  2.263160356072587757351389081936904E + 0308
I + QDR =  2.263160356072587757351389081936904E + 0308

l =        996
beta =   49.80000000000000000000000000000000

ispin =          1
QDR  = 1.643557573940390154190429173363875E + 0308
I + QDR = 1.643557573940390154190429173363875E + 0308

ispin =          2
QDR  =  9.457544390246214860747340892604545E + 0308
I + QDR =  9.457544390246214860747340892604545E + 0308

l =        998
beta =   49.90000000000000000000000000000000

ispin =          1
QDR  =  6.859317195871621637905579118618770E + 0308
I + QDR =  6.859317195871621637905579118618770E + 0308

ispin =          2
QDR  =  3.952228149418581143027425919256247E + 0309
I + QDR =  3.952228149418581143027425919256247E + 0309
```

5.2 188倍精度演算結果

188倍精度演算で粒子数N=100で実行出来ましたのでこれまでの結果と合わせてまとめて記載しました。

量子モンテカルロ法

精度調査一覧

演算精度	β	L	最小値		
			理論値	実測値(N=20)	実測値(N=100)
68倍精度	100	2000	0.567D-307	0.330D-307	0.330D-307
128倍精度	180	3600	0.120D-552	0.514D-553	0.512D-553
188倍精度	250	5000	0.130D-767	0.476D-768	0.468D-768

N=20とN=100での実測値では大きな差は見られません。