

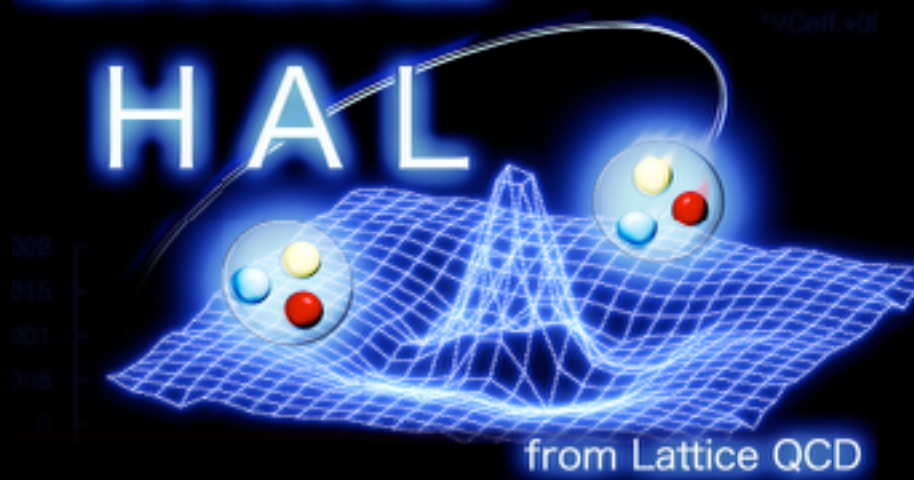
離散データに対する部分波展開と HAL QCD 法への応用

宮本 貴也 (京大基研)

for HAL QCD Collaboration



Hadron to Atomic Nuclei



S. Aoki, Y. Akahoshi, K. Sasaki

(YITP Kyoto Univ.)

T. Doi, T. Doi, T. Hatsuda, T. Iritani, S. Gongyo

(RIKEN Nishina)

T. Inoue

(Nihon Univ.)

N. Ishii, Y. Ikeda, K. Murano,

(RCNP Osaka Univ.)

H. Nemura, T. Sugiura

T. Aoyama

(KEK)

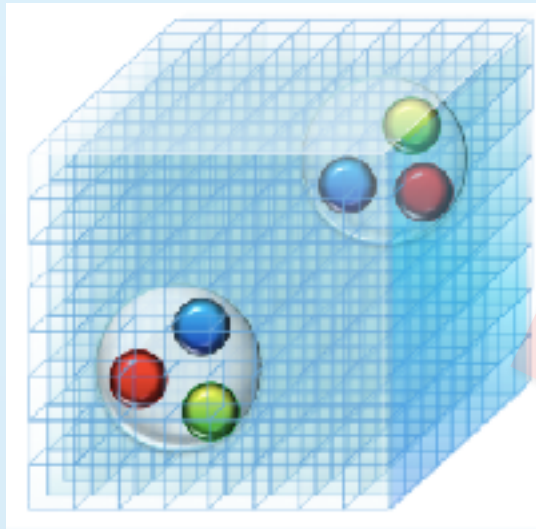
F. Etminan

(Univ. of Birjand)

★ Hadron force from lattice QCD (**HAL QCD method**)

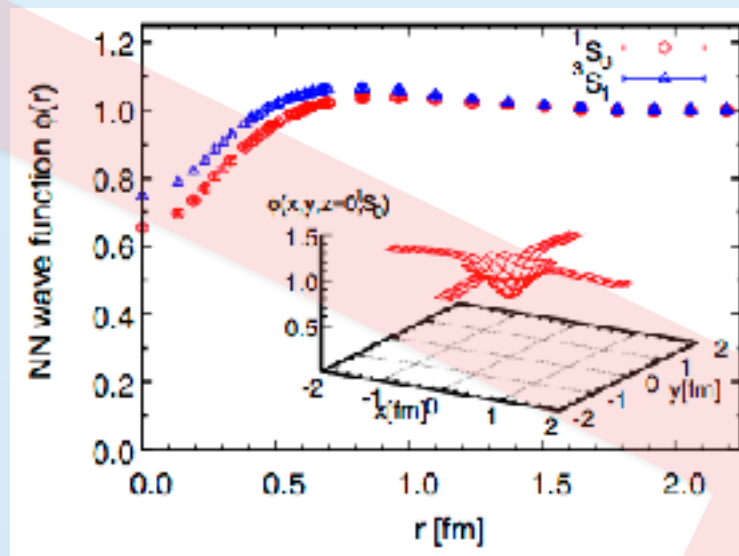
N. Ishii, S. Aoki, T. Hatsuda, Phys.Rev.Lett. 99, 022001 (2007)

Lattice QCD

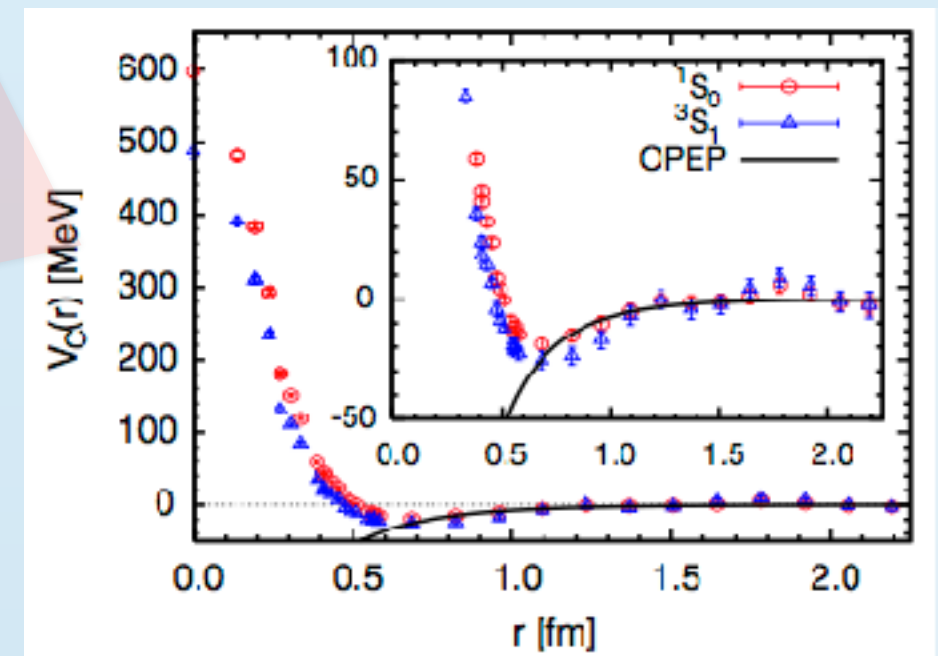


$$\psi_{\text{NBS}}(\vec{x}) \xrightarrow{\text{S-wave projection}} \psi_{\text{NBS}}^{L=0}(r)$$

NBS wave function



Potential



$$\psi_{\text{NBS}}^{L=0}(r) \xrightarrow[\text{Derivative expansion}]{\text{Schrodinger eq.}} V_C^{L=0}(r)$$

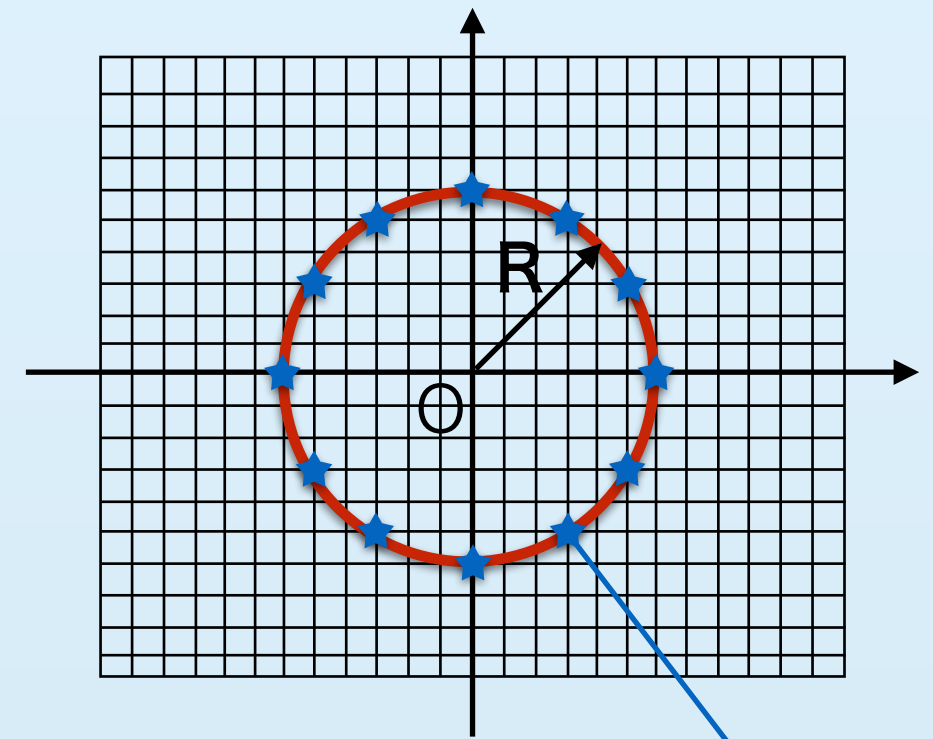
$$\psi_{\text{NBS}}(\vec{x}) \xrightarrow{\text{S-wave projection}} \psi_{\text{NBS}}^{L=0}(\vec{x})$$

✓ 連続空間では: Spherical surface integration

$$\psi^{L=0}(R) = \int_S d\Omega Y_{00}^*(\theta, \phi) \psi(\vec{x}; r = R)$$

✓ 離散データに対しては: Cubic rotation average
+ Parity average で定義

$$\psi^{(L=0)}(\vec{x}) \equiv \frac{1}{48} \sum_{g \in O_h} \psi(g^{-1} \vec{x})$$

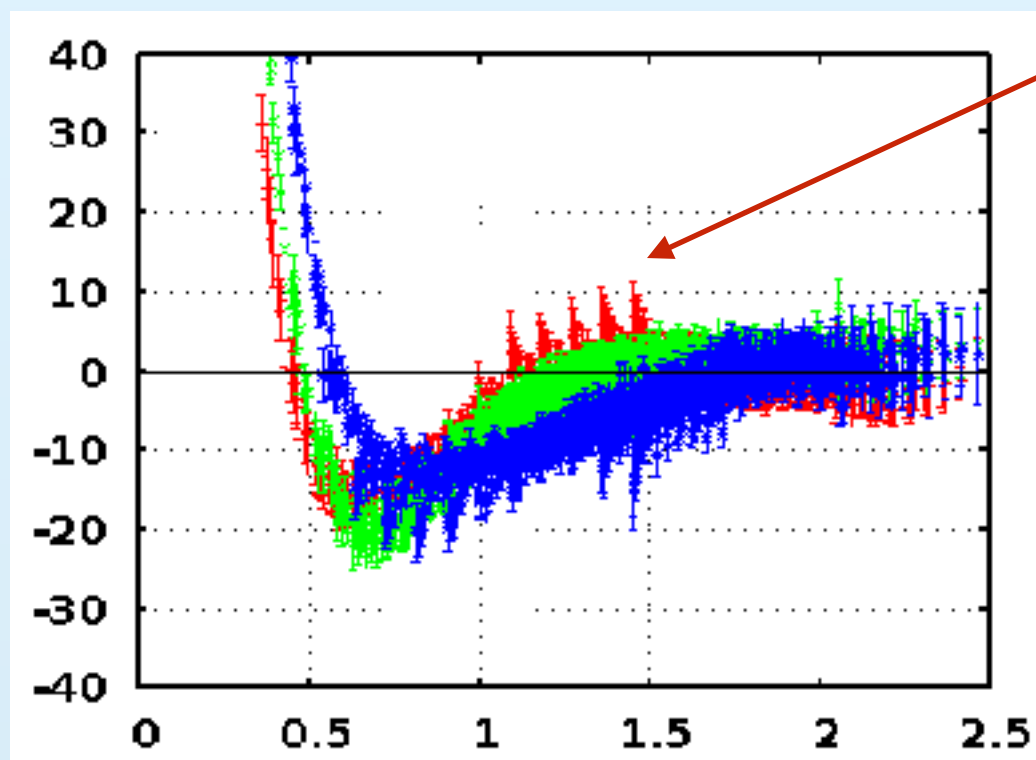


The discrete points with the distance R

→ これは、cubic rotation transformation group の A_{1+} 表現に対応しており、
 $L=0$ 成分だけでなく、 $L \geq 4$ 成分も入ってきてしまうことが知られている

☑ もし、 $L \geq 4$ 成分が無視できるほど小さければ、NBS 波動関数は（同じくポテンシャルも）
等方的になるはずである

✓ しかし、これまでの HAL QCD potential には "ひげ" のような構造が見られることがよくあった



✓ これらの構造は、ポテンシャルの非等方性を表している（多価関数になっている）

つまり、NBS 波動関数には $L \geq 4$ の成分がやはり存在し、ポテンシャルに "ひげ" 構造を引き起こしていると考えられる

✓ この現象の詳細を理解するために、 $L \geq 4$ の成分をうまく取り除きたい

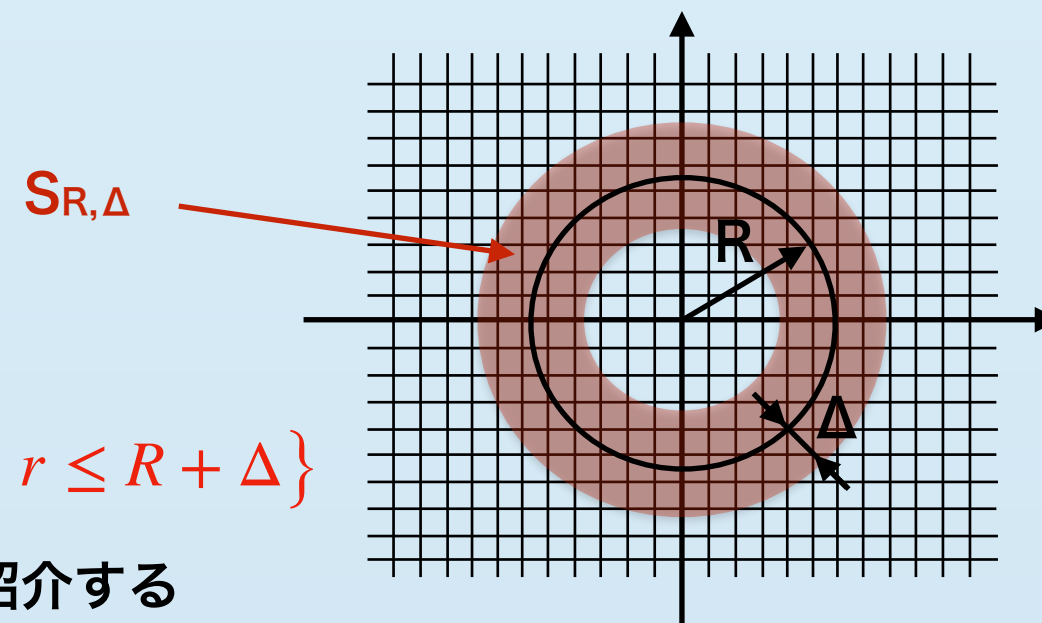
★ 近年、格子上のデータに対する部分波の分解に関するアイディアが C. W. Misner により提唱された

★ この方法の戦略は、任意のスカラー場を $r = R$ 周りに幅 2Δ を持つ球核 $S_{R,\Delta}$ 上で定義された規格直行系を用いて展開する、というものである

$$S_{R,\Delta} \equiv \{ \vec{x} \mid R - \Delta \leq r \leq R + \Delta \}$$

✓ この発表では、ミスナー法を HAL QCD 法に応用した結果を紹介する

Charles. W. Misner, Class. Quantum Grav. 21 (2004) S243-S247



Charles. W. Misner, Class. Quantum Grav. **21** (2004) S243-S247

★ 3次元空間上のスカラー場 ψ が次のように球面調和関数で展開されているとする：

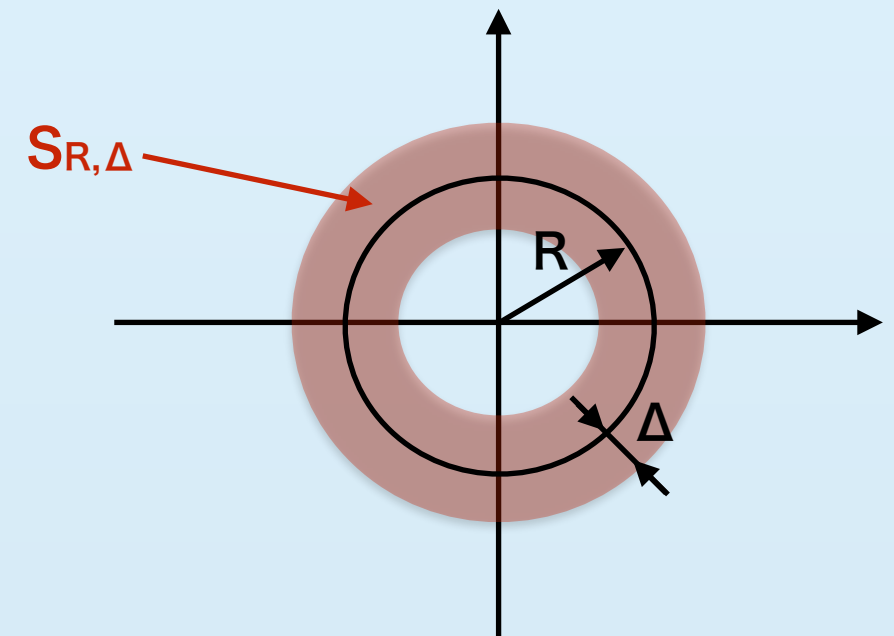
★ この時、 $r = R$ で球面調和関数の係数 $g_{lm}(R)$ を取り出すことを考える $\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{lm} g_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$

▶ まず、連続空間での議論を行う

☑ 幅 2Δ を持つ球核 $S_{R,\Delta} = \{\vec{x} \mid R - \Delta \leq |\vec{x}| \leq R + \Delta\}$ 上の規格直行系を $\mathcal{Y}_{nlm}^{R,\Delta}(r, \theta, \phi) \equiv G_n^{R,\Delta}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$ と定義する。この時、 $G_n^{R,\Delta}(r)$ ($n = 0, \dots, \infty$) は次のような動径方向の完全系である

$$\int_{R-\Delta}^{R+\Delta} dr r^2 G_n^{R,\Delta}(r) G_m^{R,\Delta}(r) = \delta_{nm}$$

この関係を持つ 1 例： $G_n^{R,\Delta}(r) \equiv \underbrace{P_n\left(\frac{r-R}{\Delta}\right)}_{\text{Legendre polynomial}} \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2n+1}{2\Delta}}$



☑ この球核の上では、スカラー場は次のように展開できる

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{nlm} c_{nlm} \mathcal{Y}_{nlm}^{R,\Delta}(r, \theta, \phi)$$

☑ このとき、係数 c_{nlm} は $S_{R,\Delta}$ 上の体積積分で求めることができる

$$c_{nlm} = \int_{S_{R,\Delta}} d^3r \overline{\mathcal{Y}_{nlm}^{R,\Delta}(r, \theta, \phi)} \psi(r, \theta, \phi) \quad \because \int_{S_{R,\Delta}} d^3r \overline{\mathcal{Y}_{nlm}^{R,\Delta}(\vec{r})} \mathcal{Y}_{n'l'm'}^{R,\Delta}(\vec{r}) = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

☑ よって、 $r = R$ で球面調和関数の係数 $g_{lm}(R)$ は次のように求められる

$$g_{lm}(R) = \sum_n c_{nlm} G_n^{R,\Delta}(R)$$

Charles. W. Misner, Class. Quantum Grav. **21** (2004) S243-S247

▶ 離散空間では、体積積分は球核上の全てのデータ点の
重み付きの和に置き換えることができる

$$\langle f|g\rangle_c \equiv \int_{\vec{x} \in S_{R,\Delta}} d^3x \overline{f(\vec{x})} g(\vec{x}) \quad \langle \mathcal{Y}_A^{R,\Delta} | \mathcal{Y}_B^{R,\Delta} \rangle_c = \delta_{AB}$$

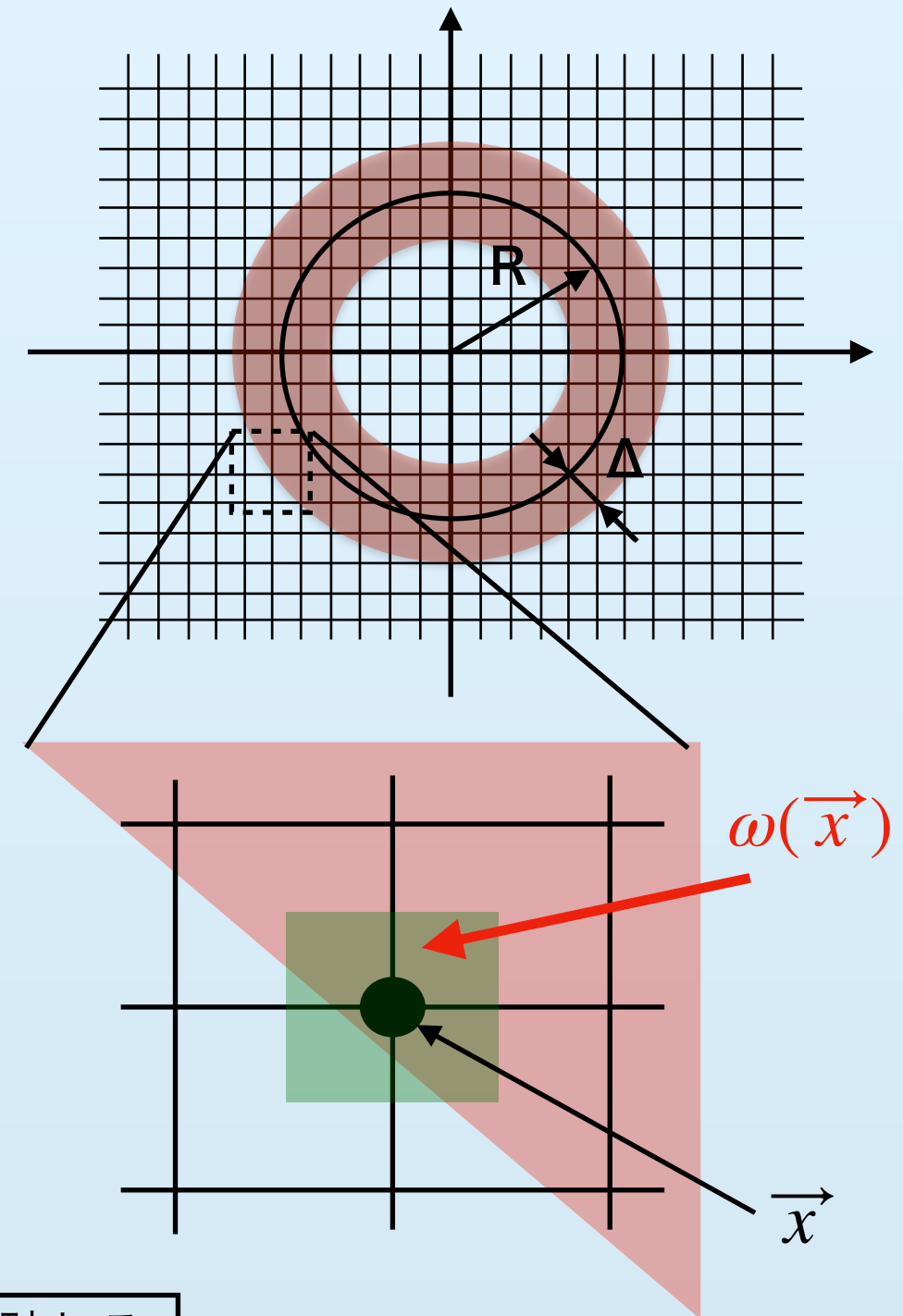
($A, B = nlm$)

$$\langle f|g\rangle_d \equiv \sum_{\vec{x} \in S_{R,\Delta}} \omega(\vec{x}) \overline{f(\vec{x})} g(\vec{x})$$

点 (x,y,z) を中心とした単位立方体と球核 $S_{R,\Delta}$ との
重なりのおおきさに対応した重み

★ この時、有限個のデータ点しかないことにより Y_{nlm} の直行性は破れる

$$\langle \mathcal{Y}_A^{R,\Delta} | \mathcal{Y}_B^{R,\Delta} \rangle_d \neq \delta_{AB}$$



- ☑ 離散空間上でも直行性を保たせるために、次のように dual basis を定義する

$$\langle \mathcal{Y}_A^{R,\Delta} | \mathcal{Y}_B^{R,\Delta} \rangle_d = G_{AB} = G_{BA}^*$$

$$\mathcal{Y}_{adj,A}^{R,\Delta} \equiv \sum_B G_{AB}^{-1} \mathcal{Y}_B^{R,\Delta}$$

$$\langle \mathcal{Y}_{dual,A}^{R,\Delta} | \mathcal{Y}_B^{R,\Delta} \rangle_d = \delta_{AB}$$

よって、 $c_{nlm} \sim \langle \mathcal{Y}_{dual,A}^{R,\Delta} | \psi \rangle_d$ を得る

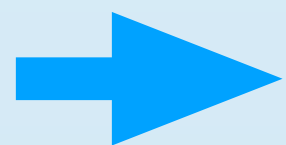
- ☑ dual basis を構成する際には、有限個のベースしか使えないことに注意

✓ $n_{\max}, l_{\max}$ は対象となるデータによって適切なものを選ぶ

$$\left(\sum_B = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \sum_{m=-l}^l \right)$$

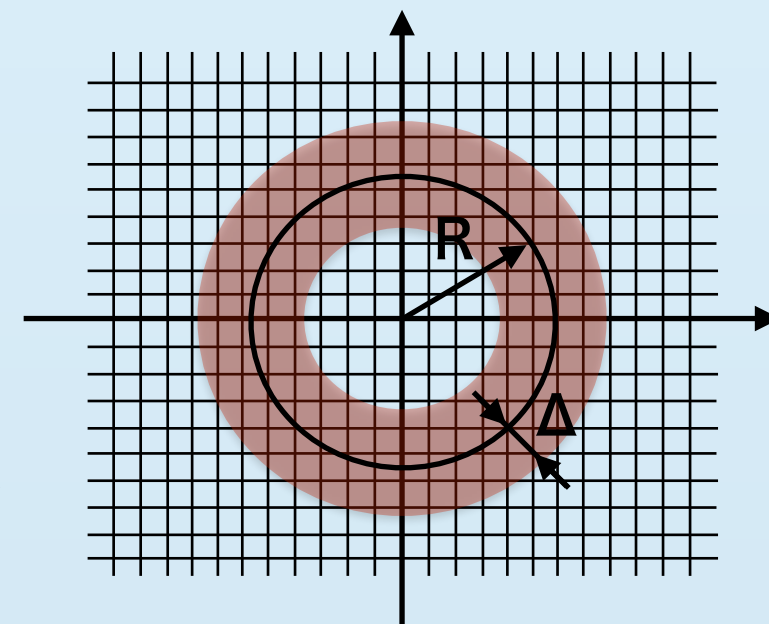
★ Δ と $n_{\max}$ の決め方 [David R. Fiske, Class. Quant. Grav. 23 \(2006\) 5951](#)

✓ 動径方向の直交基底 $G_n^{R\Delta}(r)$ は $\mathcal{O}(\Delta^{n_{\max}+2})$ だけの離散誤差を持つ



Lattice QCD data の離散誤差と同じようにスケーリングさせるために、 Δ は $\Delta \sim a$ (lattice spacing) とした方が良い

- ☑ $n_{\max}$ は、LQCD data の離散誤差より小さくなるように選ぶ
(例：LQCD の離散誤差が $\mathcal{O}(a^2)$ の場合、少なくとも $n_{\max} \geq 2$ とする)



★ Mockup data によるテスト計算の結果

$$\psi_0(r) \equiv 2 - e^{-\frac{r^2}{60}}$$

$$\psi_4(r) \equiv \frac{\sin(r/3)}{r}$$

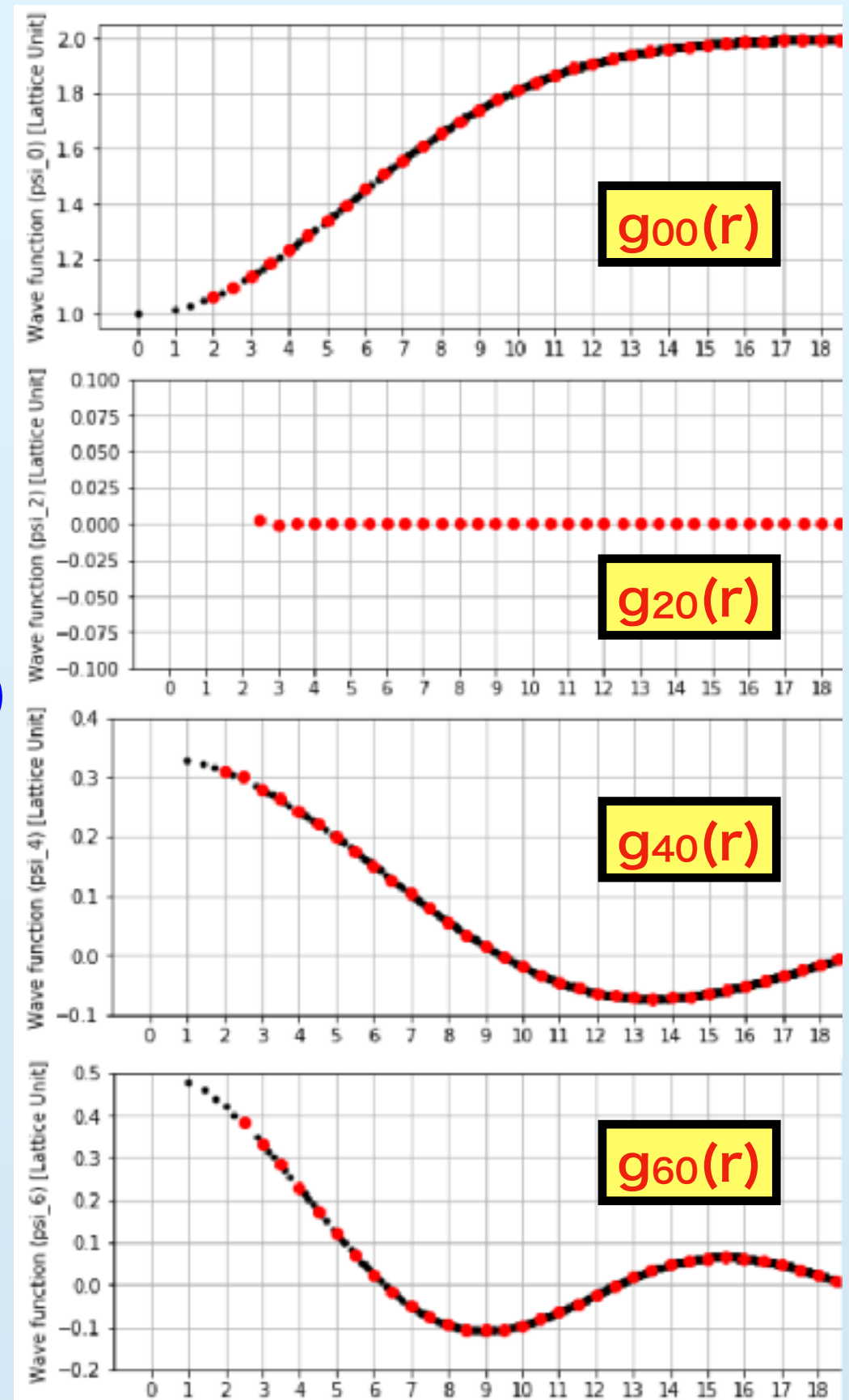
$$\psi_6(r) \equiv \frac{\sin(r/2)}{r}$$

$$\psi(\vec{r}) \equiv \psi_0(r)Y_{0,0}(\vec{r}) + \alpha\psi_4(r)Y_{4,0}(\vec{r}) + \beta\psi_6(r)Y_{6,0}(\vec{r})$$

$$(\alpha = 0.2, \beta = 0.1)$$

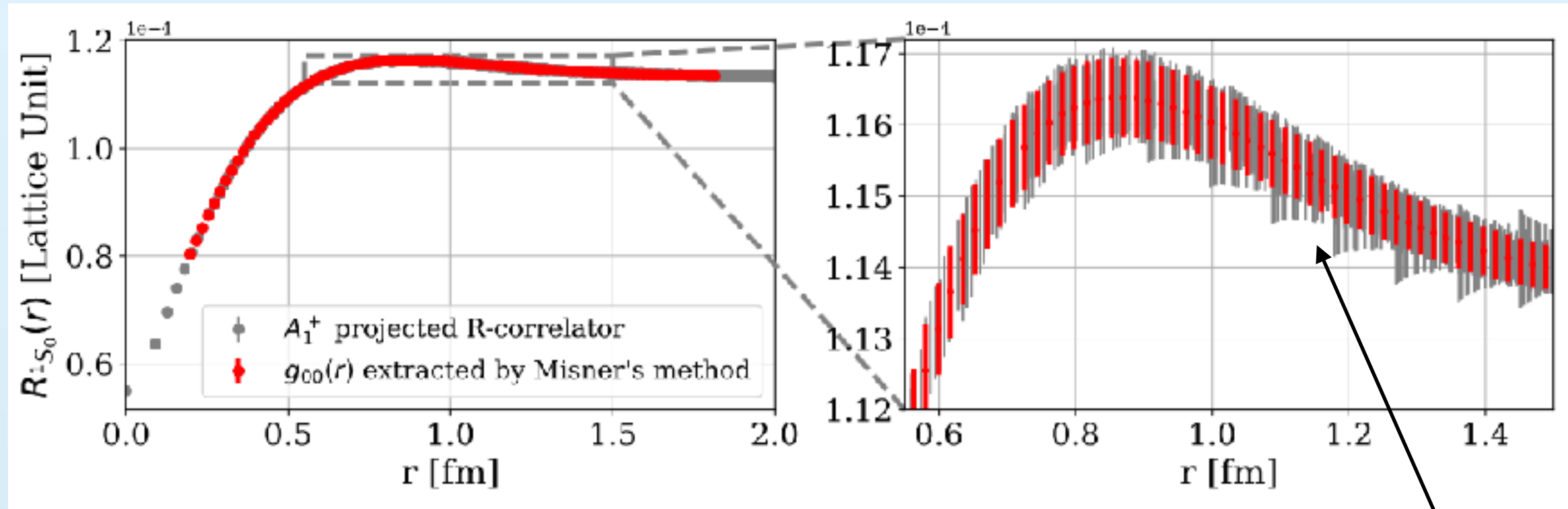
このデータに対して、 $\Delta = 1$, $n_{\max} = 2$, $l_{\max} = 6$ で
ミスナー法を適用し、 $g_{lm}(r)$ を各 r で計算した

☑ 全ての波動関数を正しく再現できている



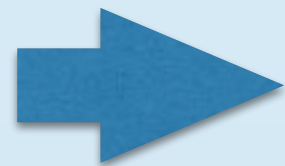
★ 実際の Lattice QCD データへの適用： $\Lambda_{\text{c}}\text{N}$ ($^1\text{S}_0$) 系

T. M., et al. [HAL QCD Collaboration],
Nucl. Phys. A971 (2018) 113



- ✓ A_1^+ 射影を行なった NBS 波動関数には、ひげ構造が見られる
- ✓ ミスナー法を用いた $L=0$ 成分の波動関数にはひげが見られない

“ひげ” 構造

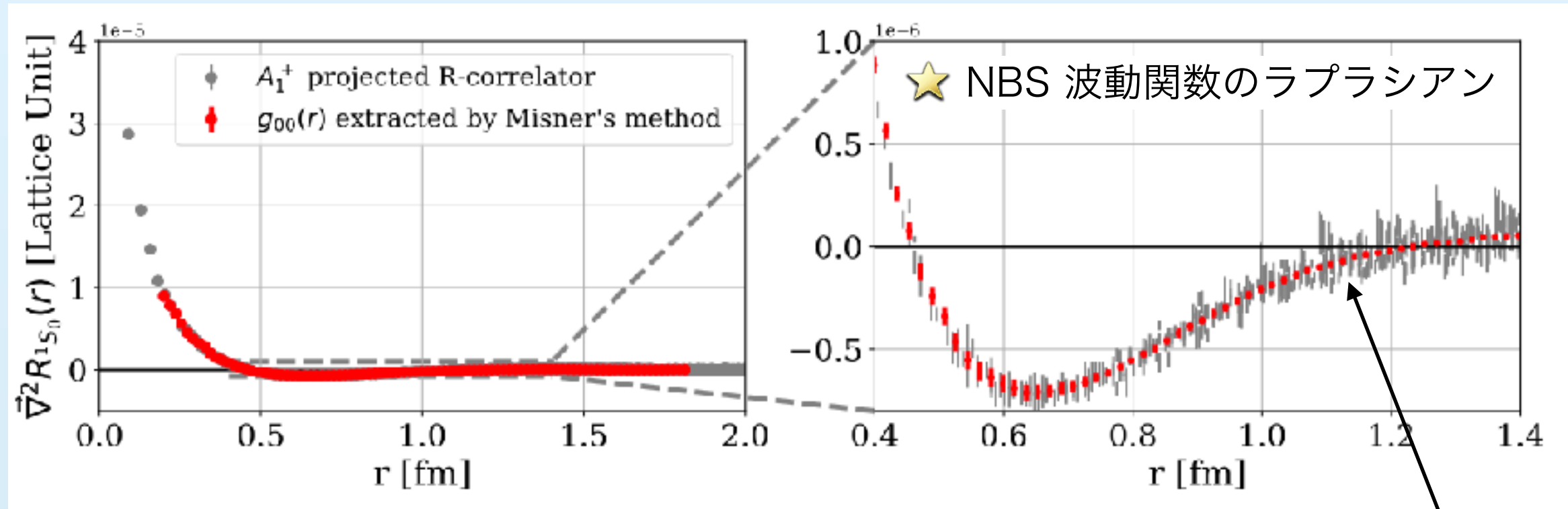


ひげ構造は、 $L \geq 4$ 成分から来ている

- ★ ポテンシャルの計算には NBS 波動関数のラプラシアンが必要のため、次にラプラシアンに関してミスナー法を適用する

★ 実際の Lattice QCD データへの適用： $\Lambda_c N$ (1S_0) 系

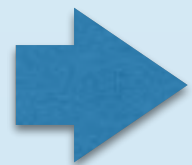
T. M, et al. [HAL QCD Collaboration],
Nucl. Phys. A971 (2018) 113



- ✓ 従来の計算では、ラプラシアンは2回差分として定義していた
- ✓ ミスナー法では、ラプラシアンは解析的に計算できる

$$\vec{\nabla}^2 g_{lm}(r) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} c_{nlm}^{R,\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r G_n^{R,\Delta}(r)]$$

- ✓ ミスナー法の結果と比べると、ひげ構造が大きくなっていることがわかる

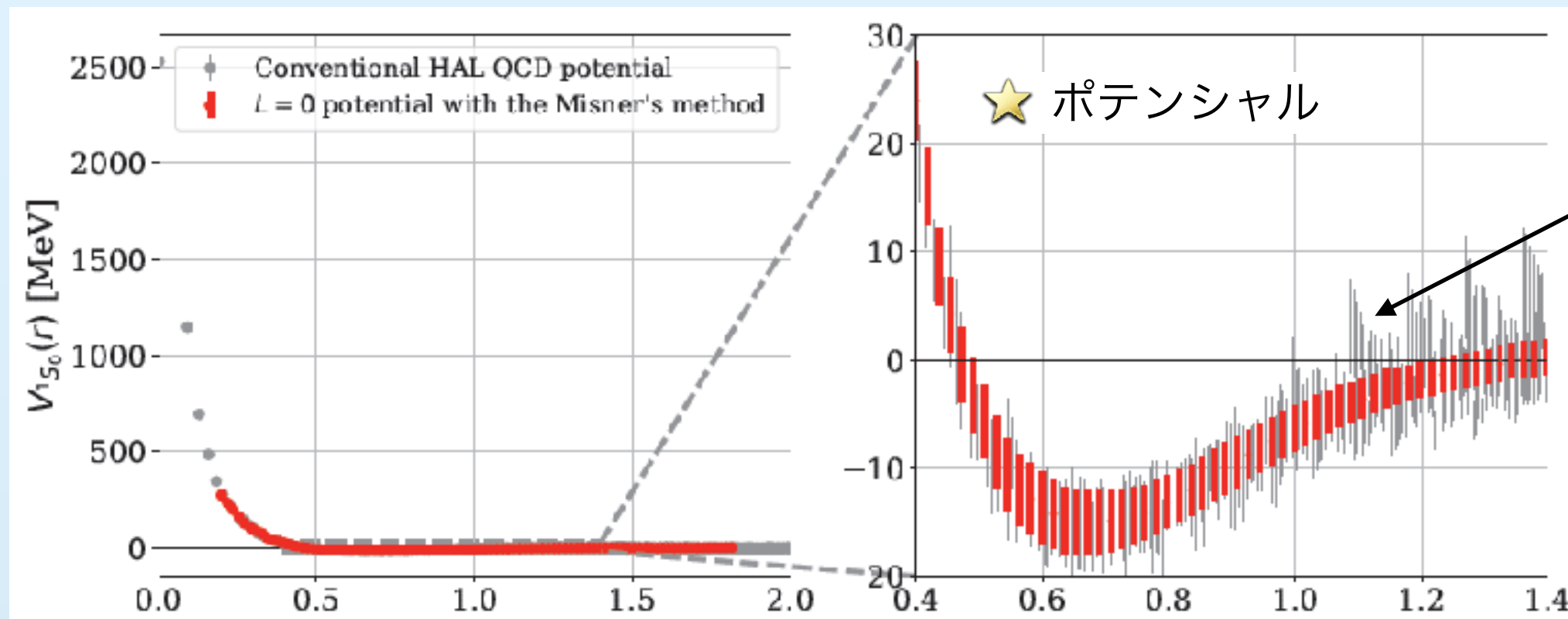


$L \geq 4$ 成分は波動関数のラプラシアンに大きなひげ構造を作る

“ひげ” 構造

★ 実際の Lattice QCD データへの適用： ΛcN (1S_0) 系

T. M, et al. [HAL QCD Collaboration],
Nucl. Phys. A971 (2018) 113



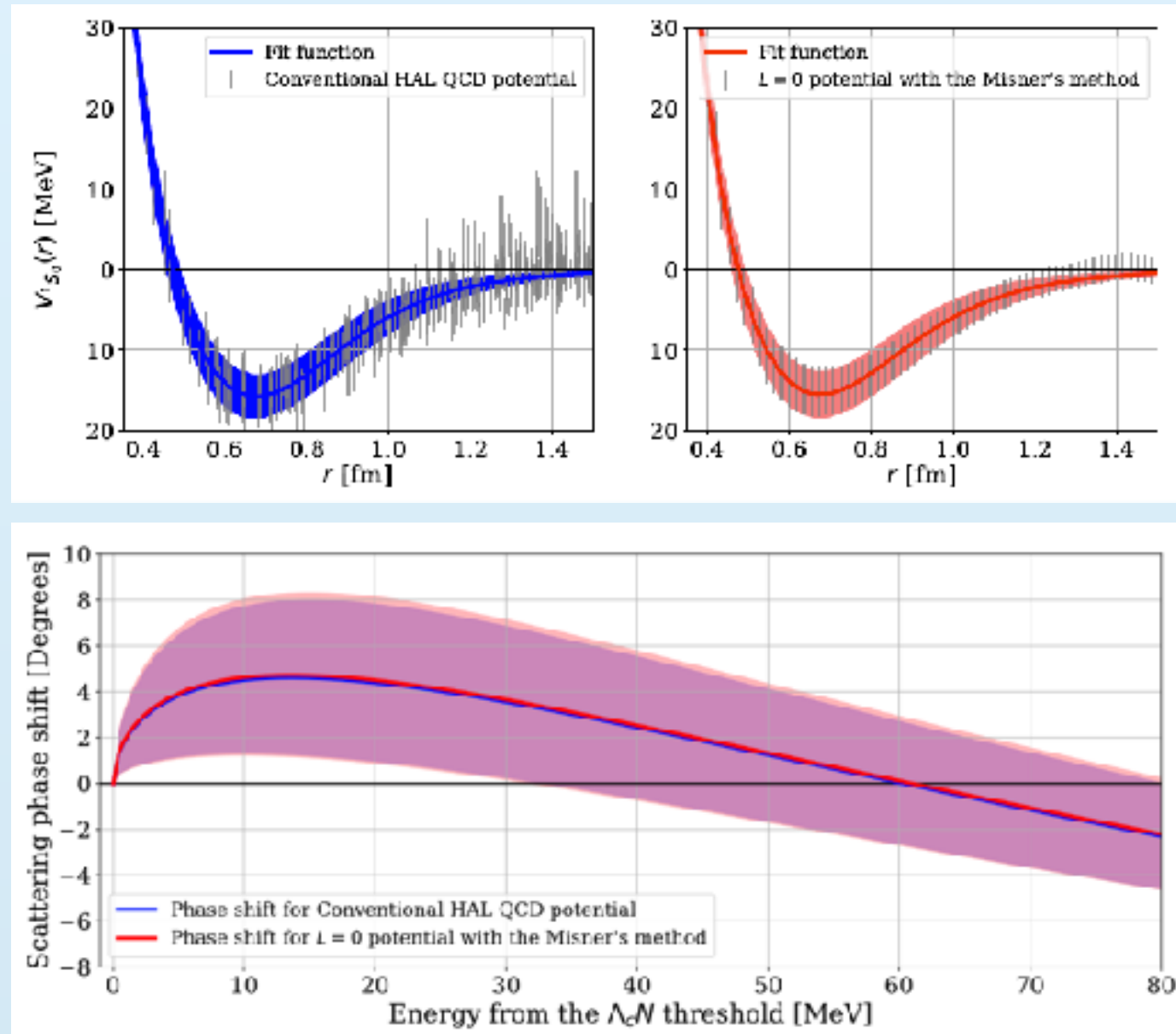
✓ ラプラシアンの大きなひげ構造に起因して、ポテンシャルにも大きなひげ構造が現れている

☑ $L \geq 4$ 成分の影響により、ポテンシャルの見かけの誤差が大きくなっている

☑ ミスナー法を用いることにより、この見かけの誤差を消すことができる

★ $L \geq 4$ が含まれることが物理量にどのように影響するのか？

従来のポテンシャルとミスナー法を用いて計算した
ポテンシャルをそれぞれフィットする



✓ それぞれのフィットパラメタは、
誤差を含めてほぼ同じものとなった

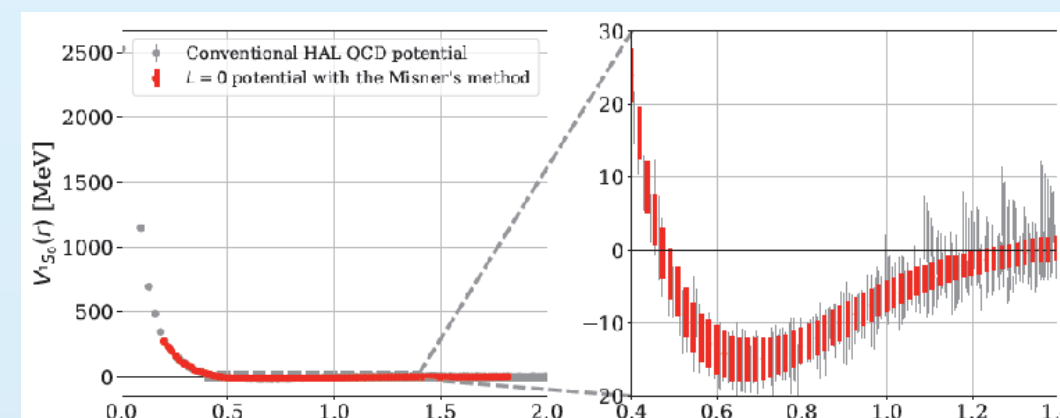
✓ 結果として、フィットパラメタから
計算される物理量（位相差など）
も同じものとなった

☑ これは、ポテンシャルのフィッティングが $L=0$ 成分をよく再現できていたことを意味している

★ Lattice 上での従来の S-wave 射影で残ってしまう $L \geq 4$ 成分の影響をみるために、
ミスナー法を HAL QCD 法に適用した

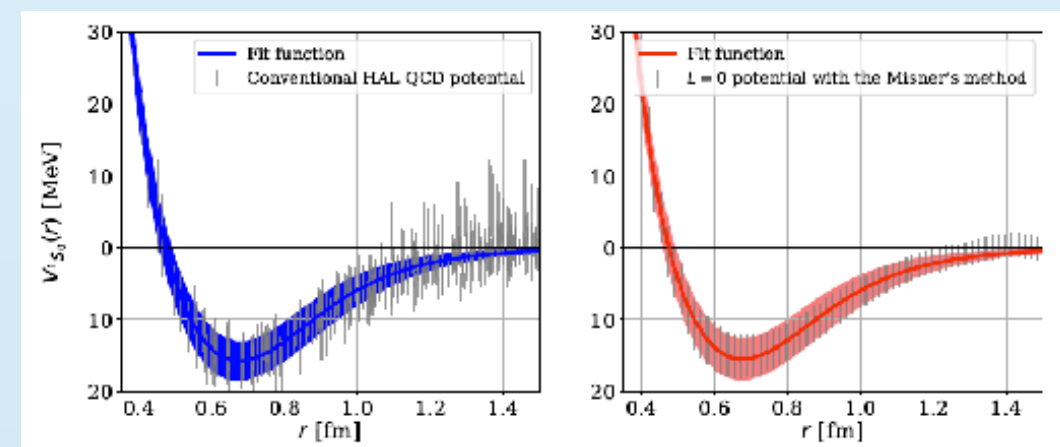
✓ A_1^+ 射影を行なった NBS 波動関数にある "ひげ" 構造はミスナー法により取り除くことができた

✓ NBS 波動関数のラプラシアンでは、
"ひげ" が大きくなることがわかった
✓ これに起因して、
ポテンシャルにも大きな "ひげ" が現れている



★ それぞれのポテンシャルをフィットし、 $L \geq 4$ 成分が物理量に与える寄与を調査した

✓ ポテンシャルのフィットは $L=0$ 成分を
よく再現できていたことがわかった



☑ 展望: $L > 0$ のポテンシャルの計算 (P-wave, D-wave など)