

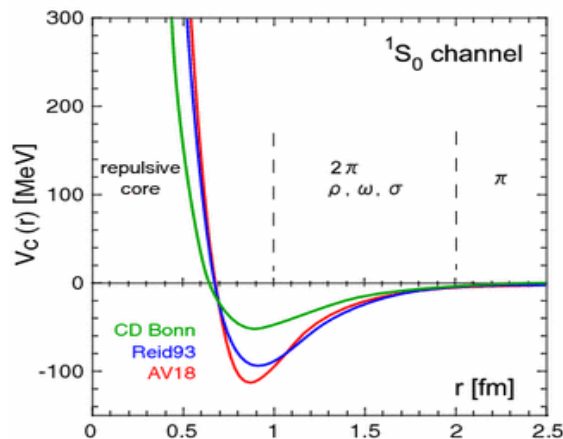
Current matrix element in HAL QCD's potential method

石井理修(阪大RCNP)

K.Watanabe and N.Ishii, PTEP**2018**(2018)043D01.

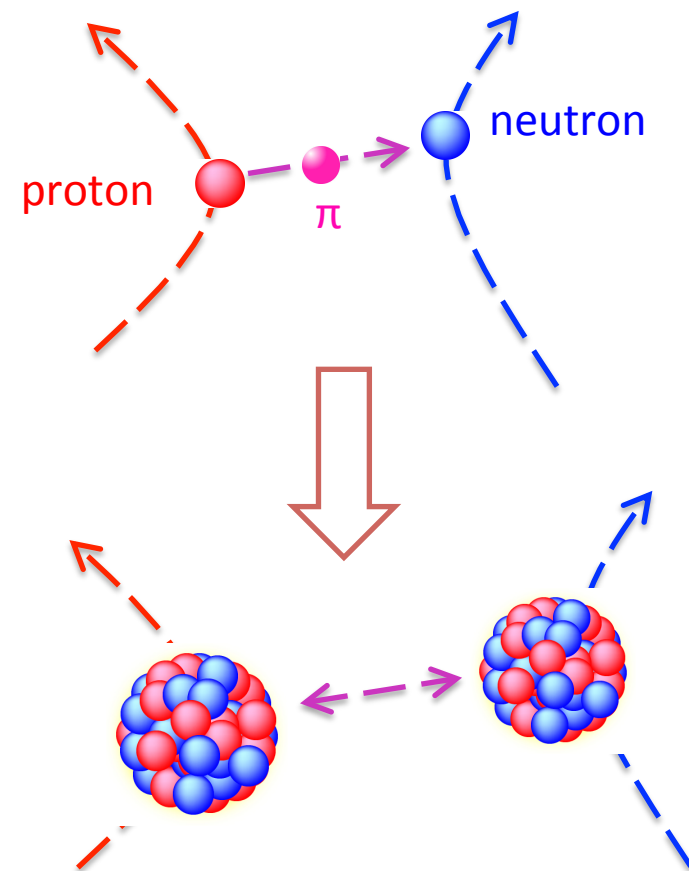
背景:核力ポテンシャル

◆ 核力ポテンシャルは原子核・宇宙物理で重要である。



□ 原子核の構造や反応の理解

□ 超新星爆発や中性子星の構造



◆ 我々は、核力ポテンシャルを格子QCDを用いて理論的に計算する独自の方法(HAL QCD法)を提案し、開発・応用を進めている。

背景: HAL QCD法

核子複合場



NBS波動関数 by LQCD



核力ポテンシャル



正しい散乱位相差
S行列

どんなのを取ってきても良いが、通常次が使われる。

$$\begin{cases} p(x) \equiv \epsilon_{abc} \left(u_a^T C \gamma_5 d_b \right) u_a(x) \\ n(x) \equiv \epsilon_{abc} \left(u_a^T C \gamma_5 d_b \right) d_a(x) \end{cases}$$

$$\psi(\vec{x} - \vec{y}; \vec{k}) \equiv \langle 0 | p(\vec{x}) n(\vec{y}) | p(+\vec{k}) n(-\vec{k}), \text{in} \rangle$$

Schrödinger 方程式を核力ポテンシャル V について逆解き

$$(E_{\vec{k}^2} - H_0) \psi(\vec{r}; \vec{k}) = \int d^3 r' V(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}'; \vec{k})$$

この核力ポテンシャル V は、
NBS波動関数と同時に、
NBS 波動関数の長距離漸近形も再現

$$\psi(\vec{x} - \vec{y}; \vec{k}) \sim e^{i\delta(k)} \frac{\sin(k |\vec{x} - \vec{y}| + \delta(k))}{k |\vec{x} - \vec{y}|} \quad \text{for s-wave}$$

→ QCDの予言する散乱位相差・S行列を
量子力学を通して引き出す。

背景: 位相差等価ポテンシャルと行列要素の計算

◆ HAL QCD 法 → QCDのS行列に忠実なポテンシャル

重要: どんな核子複合場を採用しようと、同じS行列を生成する。

違う核子複合場



形の違うNBS波動関数



形の違うポテンシャル

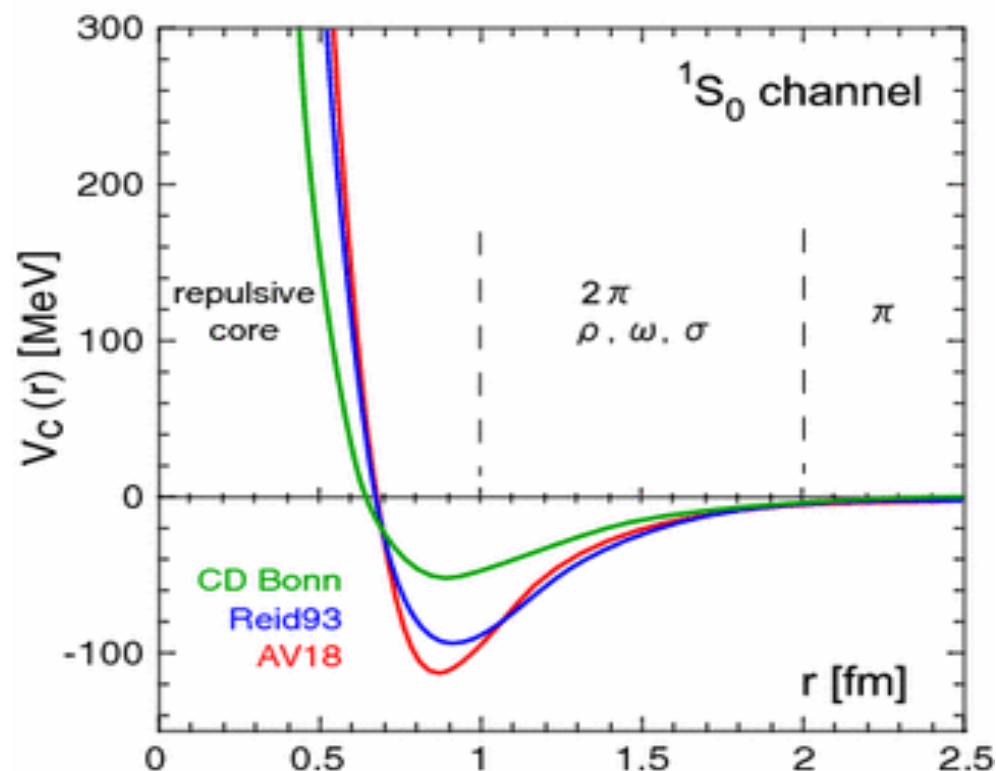


しかし

同一のS行列

位相差等価ポテンシャル

= 同じ位相差を出す形の違うポテンシャル



背景：位相差等価ポテンシャルと行列要素の計算

◆ HAL QCD 法 → QCDのS行列に忠実なポテンシャル

重要：どんな核子複合場を採用しようと、同じS行列を生成する。

違う核子複合場



形の違うNBS波動関数



形の違うポテンシャル



しかし
同一のS行列

しかしながら、

素朴な公式

$$\psi^*(x)\psi(x)$$

→ 違った確率密度(電荷密度)

- 位相差・エネルギースペクトルは、very good !
- でも、行列要素の計算はもう一工夫必要である。
- この問題は、全ての位相差等価ポテンシャルに共通する問題である。

背景: Exchange current (1)

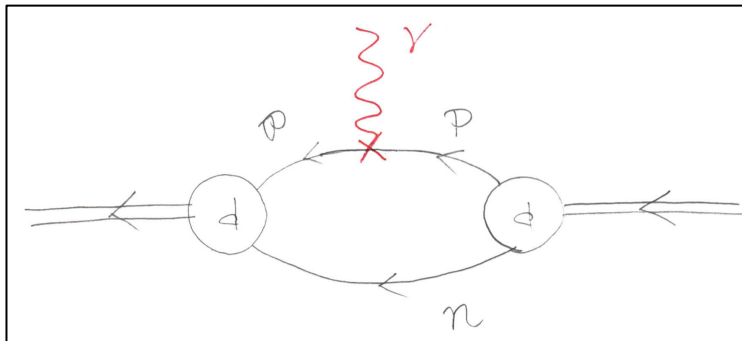
核力の理論において、電荷やカレントは**追加の補正**を受ける事が知られている。

◆ **追加の補正**: Exchange current / Exchange charge

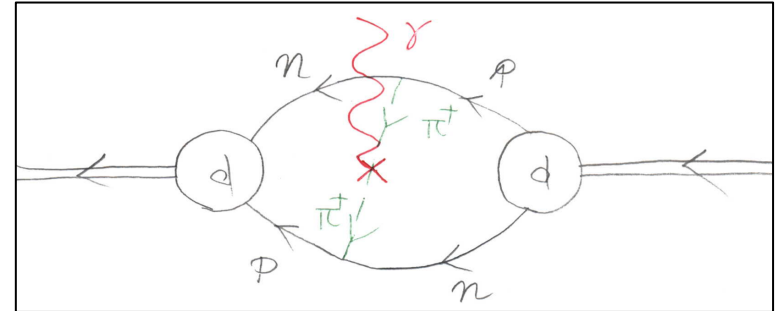
$$\rho(x) = \rho^{(1)}(x) + \rho^{(2)}(x)$$

$$\vec{J}(x) = \vec{J}^{(1)}(x) + \vec{J}^{(2)}(x)$$

$J^{(1)}$: direct current



$J^{(2)}$: exchange current



特に、重陽子のelectrodisintegration ($e+d \rightarrow e+n+p$) では、エネルギーによってこの寄与がmainになる。

背景: Exchange current (2)

◆ カレント保存(ゲージ対称性)を満たす為には、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}^{(2)}(x) = -i[V, \rho^{(1)}(x)] \quad (\rho^{(2)}(x) \sim 0 \text{ is assumed})$$

➔ 違ったポテンシャルを採用すると、違ったexch. currentが必要となる。

◆ 現象論的に決められたポテンシャルを採用した場合は、

□ カレント保存を満たすようにカレント演算子を拡張する事は出来る。

✧ D.O.Riska, Phys.Rept.**181**,207(1989).

✧ K.Ohta, Phys.Rev.C**39**,2302(1989).

□ しかし、そのような拡張が無限に存在するため、どれが本物か分からない。

◆ HAL QCDのポテンシャルを採用した場合は、

□ 原理的にQCDを使ってカレント演算子の具体的な形を決定できる。

◆ 今回の目標: この方向へ第一歩を踏み出す。

トイ模型(非相対論的2チャンネル結合模型)で具体的に定式化してみる。

Non-rela. Q.M. → Lorentz 共変系 → 複合粒子 → 格子上の2核子系

非相対論的2チャンネル結合模型での

HAL QCDポテンシャルと、カレント行列要素の計算法

非相対論的2チャンネル結合模型

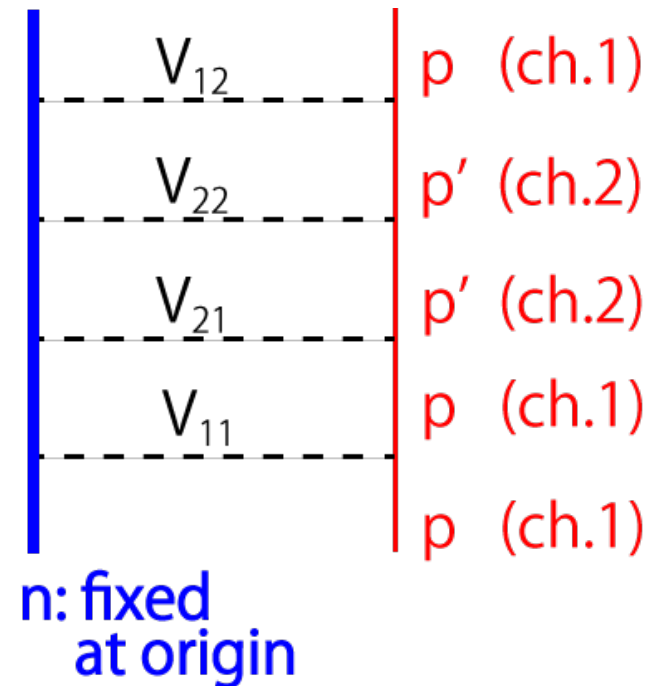
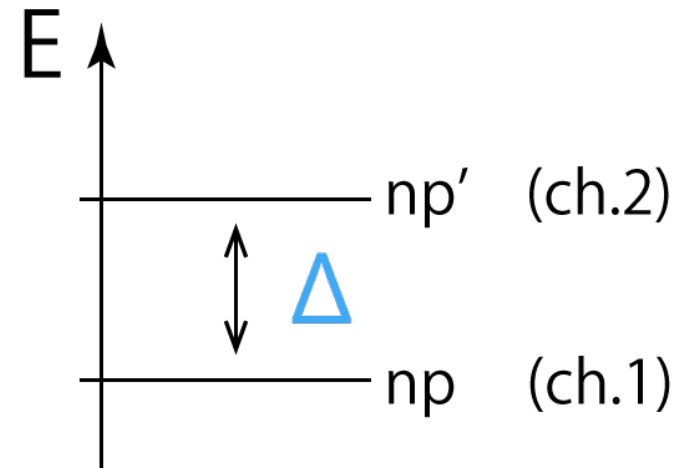
$$H \equiv H_1 + H_2 + V_{11} + V_{12} + V_{21} + V_{22}$$

$$H_1 \equiv \int d^3x \phi_1^\dagger(\vec{x}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} \right) \phi_1(\vec{x})$$

$$H_2 \equiv \int d^3x \phi_2^\dagger(\vec{x}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + \Delta \right) \phi_2(\vec{x})$$

$$V_{\alpha\beta} \equiv \int d^3x \phi_\alpha^\dagger(\vec{x}) V_{\alpha\beta}(\vec{x}) \phi_\beta(\vec{x})$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2)$$



◎イメージするもの

- ◆ np-np' 結合系
- ◆ n は原点に固定
- ◆ n, p, p' は簡単のため scalar boson とする。

“Nambu-Bethe-Salpeter (NBS)” 波動関数

◆ Def (“NBS 波動関数”)

$$\psi_{\alpha}(x) \equiv \langle 0 | \phi_{\alpha}(x) | \psi \rangle \quad (\alpha = 1, 2)$$

□ 1 粒子状態

$$| \psi \rangle = \int d^3x \left(\phi_1^{\dagger}(\vec{x}) | 0 \rangle \psi_1(\vec{x}) + \phi_2^{\dagger}(\vec{x}) | 0 \rangle \psi_2(\vec{x}) \right)$$

◆ NBS 波動関数の満たす結合チャネル方程式

$$\left(i \partial_0 + \frac{1}{2m} \partial_i^2 \right) \psi_1(x) = V_{11}(\vec{x}) \psi_1(x) + V_{12}(\vec{x}) \psi_2(x)$$

$$\left(i \partial_0 + \frac{1}{2m} \partial_i^2 - \Delta \right) \psi_2(x) = V_{21}(\vec{x}) \psi_1(x) + V_{22}(\vec{x}) \psi_2(x)$$

この模型での HAL QCDポテンシャル

(閉チャンネル ψ_2 を消去 $\rightarrow$ 開チャンネル ψ_1 の $E < \Delta$ での有効理論)

HAL QCDポテンシャルは、次のようにコンパクトにまとまる。

$$v(\vec{x}, \vec{x}') \equiv \sum_{\substack{m \\ E_m < \Delta}} \left(V_{11}(\vec{x}) \psi_{1,m}(\vec{x}) + V_{12}(\vec{x}) \psi_{2,m}(\vec{x}) \right) \tilde{\psi}_{1,m}(\vec{x}')$$

ここで、次の直交条件を満たす **双対ベクトル** を導入

$$\int d^3x \tilde{\psi}_{1,n}(\vec{x}) \psi_{1,m}(\vec{x}) = \delta_{nm}$$

$\rightarrow$

NBS 波動関数 $\psi_{1,n}(x) \equiv \langle 0 | \phi_1(x) | n \rangle$ for $E_n < \Delta$ は、次のSchrödinger eq.を満たす。

$$\left(i\partial_0 + \frac{1}{2m} \nabla^2 \right) \psi_{1,n}(x) = \int d^3x' v(\vec{x}, \vec{x}') \psi_{1,n}(x')$$

(証明) $\int d^3x' v(\vec{x}, \vec{x}') \psi_{1,n}(x')$

$$= \sum_m \left(V_{11}(\vec{x}) \psi_{1,m}(\vec{x}) + V_{12}(\vec{x}) \psi_{2,m}(\vec{x}) \right) \underbrace{\int d^3x' \tilde{\psi}_{1,m}(\vec{x}') \cdot \psi_{1,n}(\vec{x}') e^{-iE_n x_0}}_{\Rightarrow \delta_{nm}}$$

$$= V_{11}(\vec{x}) \psi_{1,n}(x) + V_{12}(\vec{x}) \psi_{2,n}(x)$$

カレント行列要素を求める為の方針

- このシステム全体を、
外部(ゲージ)場 A の中に埋め込む。
- Exch. current や Exch. charge は、
外場の方法で、外場 A に対するシステムの応答から決定する。

外場中のハミルトニアン

$$H[A_t] \equiv H_1[A_t] + H_2[A_t] + V_{11} + V_{12} + V_{21} + V_{22}$$

◆ 1体のハミルトニアンに外場を導入する

$$H_1 \equiv \int d^3x \phi_1^\dagger(\vec{x}) \left(-\frac{1}{2m} (\partial_i - iA_i(\vec{x}, t))^2 - A_0(\vec{x}, t) \right) \phi_1(\vec{x})$$

$$H_2 \equiv \int d^3x \phi_2^\dagger(\vec{x}) \left(-\frac{1}{2m} (\partial_i - iA_i(\vec{x}, t))^2 - A_0(\vec{x}, t) + \Delta \right) \phi_2(\vec{x})$$

◆ ポテンシャルの方には導入しない

$$V_{\alpha\beta} \equiv \int d^3x \phi_\alpha^\dagger(\vec{x}) V_{\alpha\beta}(\vec{x}) \phi_\beta(\vec{x})$$

こういう模型で exch currentを求めるということ。
ポテンシャルの方に外場依存性を導入した場合も、
この結果の単純拡張で大丈夫

外場中の時間発展(カットオフ付)

◆ **カットオフ**付きハミルトニアン($E < \Lambda \equiv \Delta$)

$$H_{\Lambda}[A_t] \equiv \mathbb{P}_{\Lambda} H[A_t] \mathbb{P}_{\Lambda} \quad \text{with}$$

$$\mathbb{P}_{\Lambda} \equiv \sum_{E < \Lambda} |E\rangle\langle E|$$

◆ 外場中のNBS 波動関数(カットオフ付)

$$\psi_{\alpha}(x; A) \equiv \langle 0 | \phi_{\alpha}(x; A) | \psi \rangle \quad \text{with} \quad \phi_{\alpha}(x; A) \equiv U_{\Lambda}(0, x_0; A) \phi_{\alpha}(\vec{x}) U_{\Lambda}(x_0, 0; A)$$

$$U_{\Lambda}(t_1, t_0; A) \equiv T \exp \left(i \int_{t_0}^{t_1} dt H_{\Lambda}[A_t] \right)$$

◆ 外場中のNBS波動関数(カットオフ付)は、次の**結合チャンネル方程式**を満たす。

$$\left(iD_0 + \frac{1}{2m} D_i^2 \right) \begin{pmatrix} \psi_0(x; A) \\ \psi_1(x; A) \end{pmatrix} = \int d^3x' \begin{pmatrix} V_{00;\Lambda}(\vec{x}, \vec{x}'; A_{x_0}) & V_{01;\Lambda}(\vec{x}, \vec{x}'; A_{x_0}) \\ V_{10;\Lambda}(\vec{x}, \vec{x}'; A_{x_0}) & V_{11;\Lambda}(\vec{x}, \vec{x}'; A_{x_0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0(x'; A) \\ \psi_1(x'; A) \end{pmatrix}$$

$$D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - iA_{\mu}(x)$$

$$V_{\alpha\beta;\Lambda}(\vec{x}, \vec{x}'; A_{x_0}) \equiv V_{\alpha\beta}(\vec{x}) \delta^3(x - x') + \delta V_{\alpha\beta;\Lambda}(\vec{x}, \vec{x}', A_{x_0})$$

$$\delta V_{\alpha\beta;\Lambda}(\vec{x}, \vec{x}'; A_{x_0}) \equiv \langle 0 | \phi_{\alpha}(\vec{x}) (\mathbb{P}_{\Lambda} - 1) H[A_{x_0}] \mathbb{P}_{\Lambda} \phi_{\beta}^{\dagger}(\vec{x}') | \rangle$$

外場中の HAL QCDポテンシャル

(閉チャンネル ψ_2 を消去。開チャンネル ψ_1 の有効理論を $E < \Lambda$ で作る)

HAL QCDポテンシャル(外場中)

$$v_{\Lambda}(\vec{x}, \vec{x}'; A_{x_0})$$

$$\equiv \sum_{\substack{m \\ E_m < \Lambda}} \int d^3x'' \left(V_{11,\Lambda}(\vec{x}, \vec{x}''; A_{x_0}) \psi_{1,m}(\vec{x}'') + V_{12,\Lambda}(\vec{x}, \vec{x}''; A_{x_0}) \psi_{2,m}(\vec{x}'') \right) \tilde{\psi}_{1,m}(\vec{x}')$$

ここで、次の直交関係を満たす**双対ベクトル**を用いた

$$\int d^3x \tilde{\psi}_{1,n}(\vec{x}) \psi_{1,m}(\vec{x}) = \delta_{nm}$$



外場中のNBS 波動関数 $\psi_{1,n}(x; A) \equiv \langle 0 | \phi_1(x; A) | n \rangle$ は、外場中の Schrödinger 方程式を満たす。

$$\left(iD_0 + \frac{1}{2m} D_i^2 \right) \psi_{1,n}(x; A) = \int d^3x' v_{\Lambda}(\vec{x}, \vec{x}'; A_{x_0}) \psi_{1,n}(x; A) \quad \text{for } E_n < \Lambda$$

$$D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - iA_{\mu}(x)$$

(proof is similar)

Currentの行列要素

外場中の Schrödinger 方程式

$$\left(iD_0 + \frac{1}{2m} D_i^2 \right) \psi_{1,n}(x; A) = \int d^3x' v_\Lambda(\vec{x}, \vec{x}'; A_{x_0}) \psi_{1,n}(x; A) \quad \text{for } E_n < \Lambda$$



$$\frac{\delta}{\delta A_\mu(z)} (\text{both side}) \Big|_{A \equiv 0}$$

$$A \equiv 0$$

$$\left(i\partial_0 + \frac{1}{2m} \partial_i^2 - v_\Lambda \right) \frac{\delta \psi_{1,n}(x; A)}{\delta A_\mu(z)} = \underbrace{\frac{\delta}{\delta A_\mu(z)} \left(-iD_0 - \frac{1}{2m} D_i^2 + v_\Lambda \right)}_{\equiv K_\mu(z)} \cdot \psi_{1,n}(x)$$



グリーン関数を使う

$$\frac{\delta \psi_{1,n}(x; A)}{\delta A_\mu(z)} = \left(i\partial_0 + \frac{1}{2m} \partial_i^2 - v_\Lambda \right)^{-1} K_\mu(z) \cdot \psi_{1,n}(x)$$

$$A \equiv 0$$

両辺を比較すると、目的の公式に到達する。

Current 行列要素計算の公式

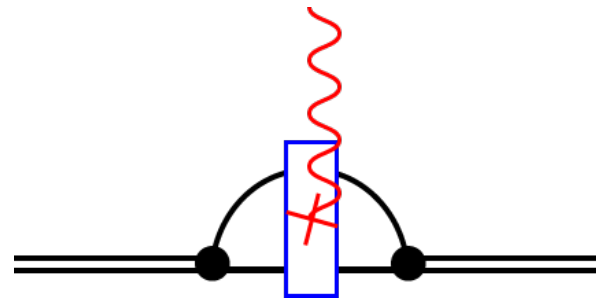
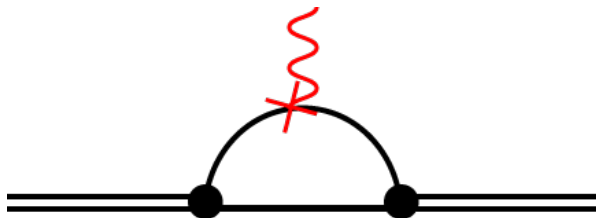
$$\langle m | j_\mu(\vec{z}) | n \rangle = - \int d^3x \int d^3x' \psi_m^L(\vec{x}) K_\mu(\vec{x}, \vec{x}'; \vec{z}) \psi_n^R(\vec{x}')$$

$$K_\mu(\vec{x}, \vec{x}'; \vec{z}) \equiv \frac{\delta}{\delta A_\mu(z)} \left[\left(-iD_0 + \frac{1}{2m} D_i^2 \right) \delta^3(x - x') + v_\Lambda(\vec{x}, \vec{x}'; A_{x_0}) \right]_{A \equiv 0}$$

$$\psi_n^R(\vec{x}), \psi_n^L(\vec{x}) \quad \text{right/left eig. func. of} \quad h \equiv -\frac{1}{2m} \partial_i^2 + v_\Lambda$$

◆ $\mu=0$ 成分

$$\langle m | j_0(\vec{z}) | n \rangle = \underbrace{\psi_m^L(\vec{z}) \psi_n^R(\vec{z})}_{\text{direct charge}} - \underbrace{\int d^3x \int d^3x' \psi_m^L(\vec{x}) \frac{\delta v_\Lambda(\vec{x}, \vec{x}'; A)}{\delta A_0(\vec{z})} \psi_n^R(\vec{x}')}_{\text{exch. charge}}$$



LQCDで使用する手順

◆ 外場中のNBS波動関数(カットオフ付き)を生成

$$\psi_{1,n}(x;A) \equiv \langle 0 | \phi_1(x;A) | n \rangle \quad \text{for } E_n < \Lambda \equiv \Delta$$

◆ 外場中のHAL QCD ポテンシャルを、 $\psi_{1,n}(x;A)$ が次の Schrödinger eq.を満たす事を要請して決定する。

$$\left(iD_0 + \frac{1}{2m} D_i^2 \right) \psi_{1,n}(x;A) = \int d^3x' v_\Lambda(\vec{x}, \vec{x}'; A_{x_0}) \psi_{1,n}(x;A) \quad \text{for } E_n < \Lambda$$

◆ カレントの行列要素を計算する公式：

$$\langle m | j_\mu(\vec{z}) | n \rangle = - \int d^3x \int d^3x' \psi_m^L(\vec{x}) K_\mu(\vec{x}, \vec{x}'; \vec{z}) \psi_n^R(\vec{x}') \quad \text{for } E_m, E_n < \Lambda$$

$$K_\mu(\vec{x}, \vec{x}'; \vec{z}) \equiv \frac{\delta}{\delta A_\mu(z)} \left[\left(-iD_0 + \frac{1}{2m} D_i^2 \right) \delta^3(x - x') + v_\Lambda(\vec{x}, \vec{x}'; A_{x_0}) \right]_{A \equiv 0}$$

$$\psi_n^R(\vec{x}), \psi_n^L(\vec{x}) \quad \text{right and left eig. vectors of} \quad h \equiv -\frac{1}{2m} \partial_i^2 + v_\Lambda$$

まとめ

- ◆ HAL QCD法で作ったポテンシャルで量子力学的に行列要素を計算する際、素朴な公式では、結果が核子の複合場の選び方に依存する。
→これは、exch. current や exch. chargeを導入する事で解決可能である。
- ◆ 最初の第一歩として、トイ模型(非相対論的2チャンネル結合模型)において、外場の方法を用いて具体的に定式化してみた。
 - この方法により、元の理論(非相対論的2チャンネル結合模型)と全く同じ行列要素の結果を、HAL QCDポテンシャルで作った有効量子力学で得る事ができる。
- ◆ この方法を格子QCDの2核子系に適用するのは、まだ非常に不便である。
 - カットオフの実装?????
 - (このカットオフのせいで、カレント保存やゲージ対称性の話がよく分からなくなってしまった)
 - ポテンシャルの汎関数微分の実装?????
 - Galilei 対称性 → Lorentz 対称性
 - 複合粒子の2体問題への拡張
- ◆ いきなり、格子QCDの2核子系の数値計算への適用は難しいので、簡単なsingle hadron(=multi quark系)へ適用してみる。