

# 重イオン衝突の動力学と熱力学：分子動力学法によるアプローチ

小野章

東北大学

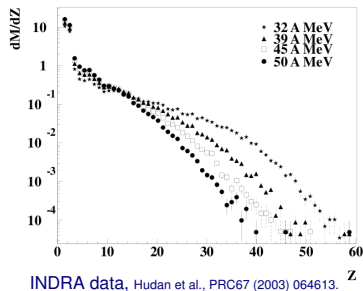
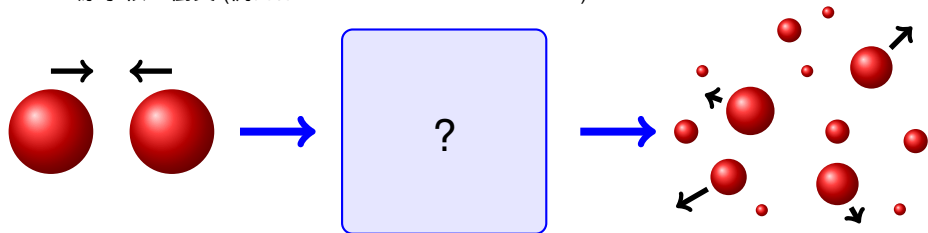
## 素核宇融合レクチャーシリーズ 第 14 回

重イオン衝突では、衝突エネルギーなどの条件によって様々な密度や励起エネルギーの系が実現し、多くの場合、最終的には多数の粒子（大小の原子核や自由核子）に分解することが知られている。核子あたり数十から数百 MeV 程度の入射エネルギーでは、核子多体系のダイナミクスとして理解すべきであるが、核物質の状態方程式や液相気相相転移のような熱力学的性質を探る場としても興味を持たれている。

重イオン衝突の分野では、反応の始めから終わりまでの時間発展を近似的に解く輸送模型が開発されてきた。このレクチャーでは、輸送模型の中でも量子力学的色彩の濃い反対称化分子動力学法を解説し、反応や熱平衡系への応用例を紹介する。特に、学部レベルの量子力学を前提として、理論に取り入れる要素（核子のフェルミ統計性、量子分岐、粒子などを作るクラスター相関など）の影響を見ることにより、高励起の核子多体系が多彩な量子力学的特徴を示していることをお伝えしたい。また、重イオン衝突から状態方程式（陽子中性子非対称度に関する対称エネルギーの密度依存性）を得るための最近の取り組みについても紹介するが、そこでもクラスター相関は重要な役割を担っているようである。

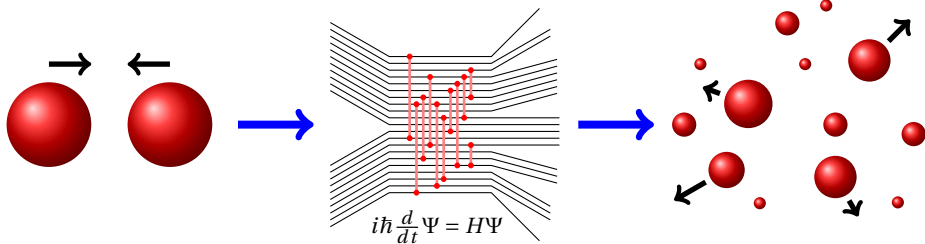
# 重イオン衝突の微視的動力学と物質としての性質

二つの原子核の衝突 (例えば Xe + Sn at 50 MeV/nucleon)

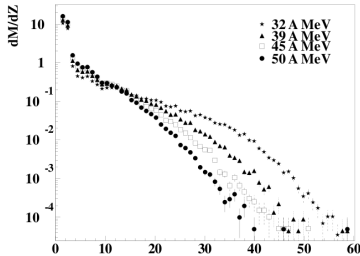


# 重イオン衝突の微視的動力学と物質としての性質

二つの原子核の衝突 (例えば Xe + Sn at 50 MeV/nucleon)



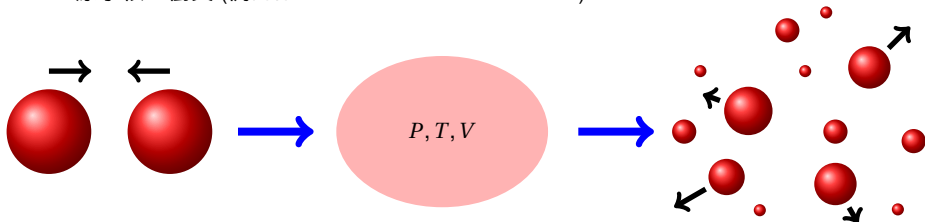
- 多数の核子の微視的な動力学



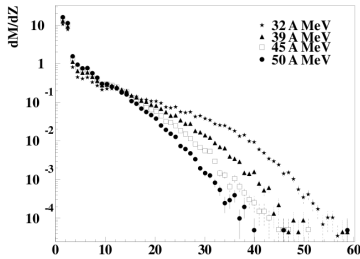
INDRA data, Hudan et al., PRC67 (2003) 064613.

# 重イオン衝突の微視的動力学と物質としての性質

二つの原子核の衝突 (例えば Xe + Sn at 50 MeV/nucleon)



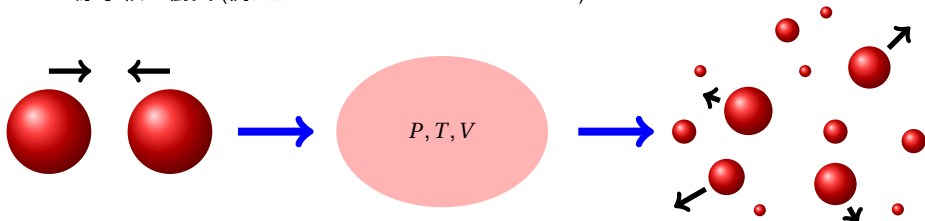
- 多数の核子の微視的な動力学
- 核子からなる物質の性質
  - 密度:  $\rho_0 \rightarrow 1.5\rho_0$   
 $\rightarrow 0.5\rho_0 \rightarrow 0$
  - 励起エネルギー: 12.5 MeV/nucleon ( $\approx$  B.E.)  
 $\rightarrow 2$  MeV/nucleon  $\rightarrow 0$
  - 液相気相相転移
  - 密度のゆらぎ, クラスタ関連など



INDRA data, Hudan et al., PRC67 (2003) 064613.

# 重イオン衝突の微視的動力学と物質としての性質

二つの原子核の衝突 (例えば Xe + Sn at 50 MeV/nucleon)



- 多数の核子の微視的な動力学
- 核子からなる物質の性質
  - 密度:  $\rho_0 \rightarrow 1.5\rho_0$   
 $\rightarrow 0.5\rho_0 \rightarrow 0$
  - 励起エネルギー: 12.5 MeV/nucleon ( $\approx$  B.E.)  
 $\rightarrow 2$  MeV/nucleon  $\rightarrow 0$
  - 液相気相相転移
  - 密度のゆらぎ, クラスタ関連など

## Partitioning of protons

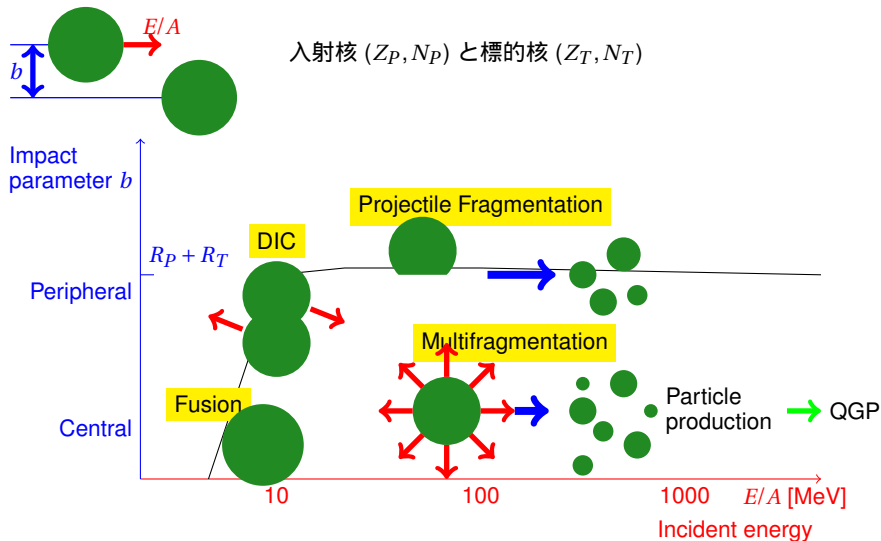
|                     |                |
|---------------------|----------------|
| p                   | $\approx 10\%$ |
| $\alpha$            | $\approx 20\%$ |
| d, t, $^3\text{He}$ | $\approx 10\%$ |
| $A > 4$             | $\approx 60\%$ |

Exp. data (INDRA etc.)

INDRA data, Hudan et al., PRC67 (2003) 064613.

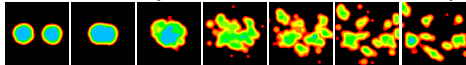
1. 重イオン衝突の概観
2. 平均場理論
3. 分子動力学
4. 一粒子的量子分岐による拡張
5. 熱平衡の観点から
6. クラスタ関連
7. 状態方程式と重イオン衝突

# 重イオン衝突の現象の概観



# 超新星爆発，中性子星，重イオン衝突

## 重イオン衝突 (数十～数百 MeV/nucleon～)

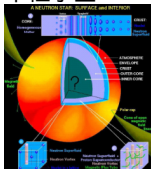


## 超新星爆発

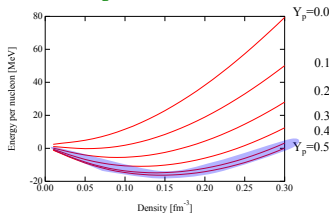


核物質の状態方程式を通じて密接に関連

## 中性子星



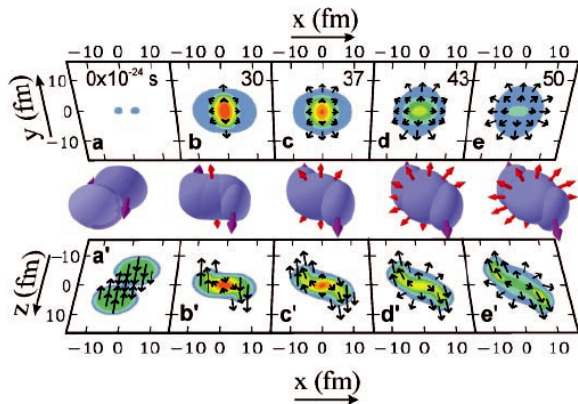
## Which region of neutron-rich EOS?



- 密度  $\rho$ :  $\dots \sim \frac{1}{10}\rho_0 \sim \frac{1}{2}\rho_0 \sim \rho_0 \sim 2\rho_0 \sim \dots$
- 温度  $T$ :  $0 \text{ MeV} \sim 1 \text{ MeV} \sim 10 \text{ MeV} \sim \dots$
- 粒子数: 数百  $\rightarrow 10^{??} = \infty$
- 陽子中性子非対称度  $\delta = \frac{N-Z}{A}$ :  $0 \sim 0.25 \rightarrow 1$
- 時間スケール，熱平衡:  $10^{-22} \text{ s} \rightarrow 1 \text{ s}$

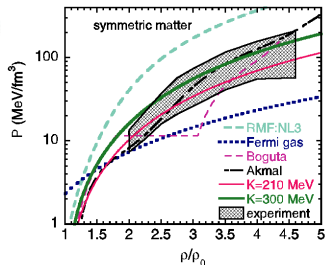


# 重イオン衝突で探る高密度状態

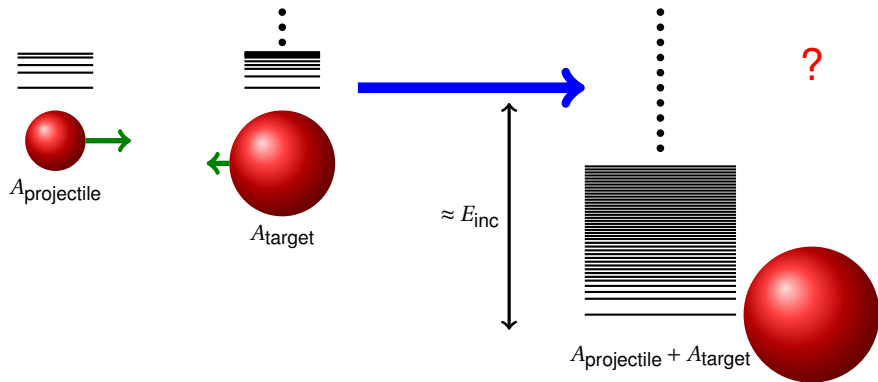


Danielewicz et al.,  
Science 298 (2002) 1592.

対称核物質 ( $N = Z$ ) の状態方程式

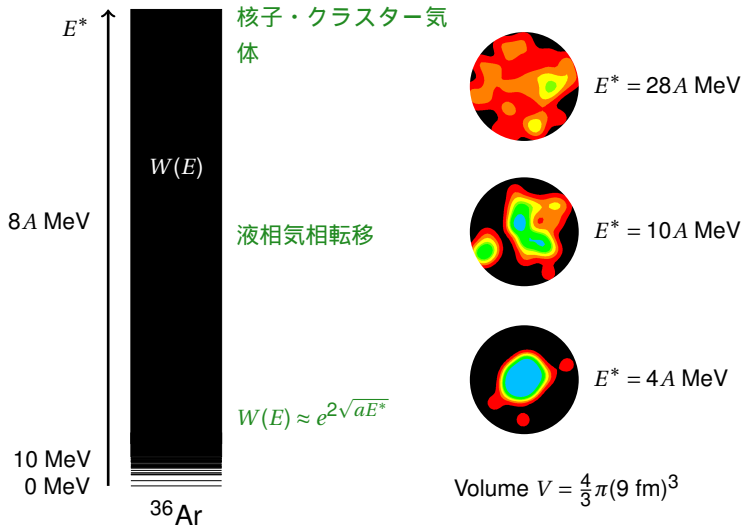


# 重イオン衝突でさぐる高励起状態

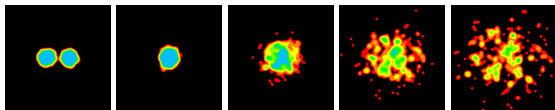


- 反応メカニズム
- 原子核の高励起状態とその崩壊，核物質の熱力学的性質

# 箱に閉じ込められた系の励起状態

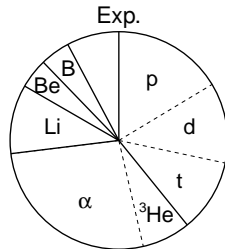
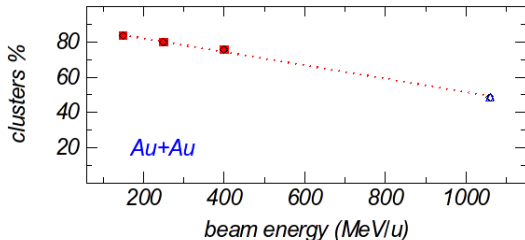


# 高エネルギーでのクラスター生成



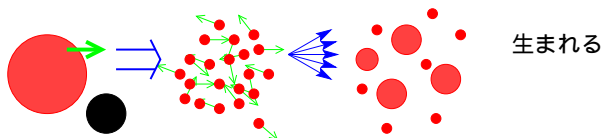
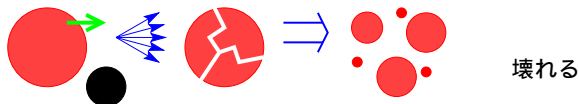
Au + Au at 150 MeV/u

Reisdorf et al., NPA612(1997)493.



- 相当の高エネルギーの状況でも，バラバラの核子には分解しない．
- クラスターやフラグメントは常に系全体の主要な部分を占める．

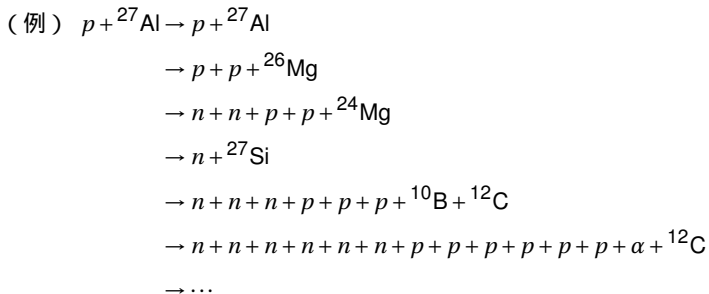
# Fragmentation or Clusterization?



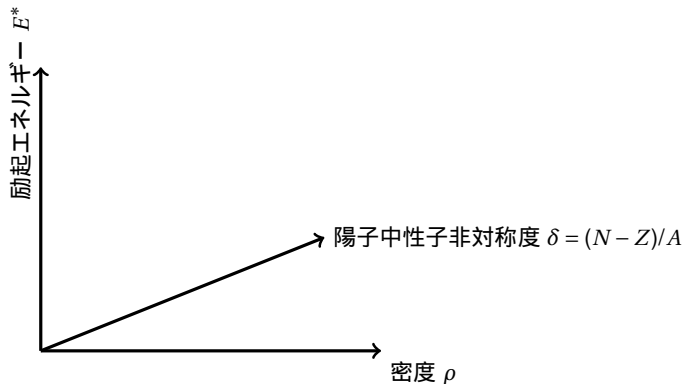
この講義では、便宜上

- $A \gtrsim 5$  の原子核を「フラグメント」
- $A \leq 4$  の小さな原子核を「クラスター」

と呼ぶことが多いと思いますが、それらの生成機構を表しているわけではありません。



- 特定のチャンネルを精度よく記述することよりも、あらゆるチャンネルをバランス良く記述することを目指す。



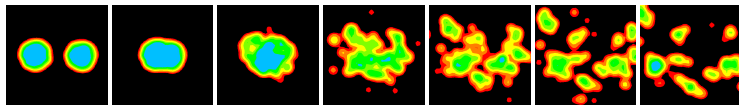
様々な状況下での核子多体系（核物質，原子核）の性質や現象を探る

## 現象の特徴

- 多数の核子が関わる複雑な反応過程
- 高励起状態
- 膨大な数の反応チャンネル
- 動的な過程である
- 熱力学的性質も関係

## どう取り扱えばよさそうか

- 核子自由度に基づいた理論
- 量子力学的であることが望まれるが、 $H\psi = E\psi$  では済まない
- 統計力学的
- 時間発展を解く
  - 平均場理論（独立粒子描像）を出発点とし、その拡張を考える．
  - ...





1. 重イオン衝突の概観
2. 平均場理論
  - 静的な問題
  - 時間依存の平均場理論
3. 分子動力学
4. 一粒子的量子分岐による拡張
5. 熱平衡の観点から
6. クラスタ相関
7. 状態方程式と重イオン衝突

# 独立粒子描像

核子多体系としての原子核  $H = \sum_{i=1}^A \frac{1}{2m} \mathbf{p}_i^2 + \sum_{i<j} v(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + (\text{多体力})$

↓

平均場 (独立粒子) 近似  $H' = \sum_{i=1}^A \left( \frac{1}{2m} \mathbf{p}_i^2 + U(\mathbf{r}_i) \right) = \sum_{i=1}^A h_i$

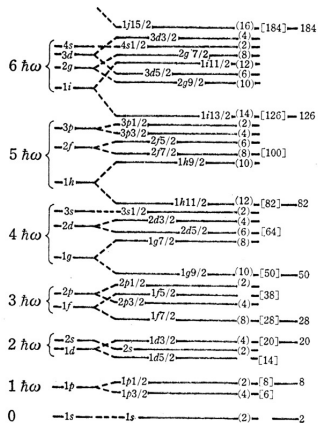


例えば, 原子核の基底状態

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(\mathbf{r}_1) & \varphi_1(\mathbf{r}_2) & \cdots & \varphi_1(\mathbf{r}_A) \\ \varphi_2(\mathbf{r}_1) & \varphi_2(\mathbf{r}_2) & \cdots & \varphi_2(\mathbf{r}_A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_A(\mathbf{r}_1) & \varphi_A(\mathbf{r}_2) & \cdots & \varphi_A(\mathbf{r}_A) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det[\varphi_i(\mathbf{r}_j)]$$

$$h\varphi_i(\mathbf{r}) = \epsilon_i \varphi_i(\mathbf{r}), \quad \epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq \cdots \leq \epsilon_A \leq \cdots$$

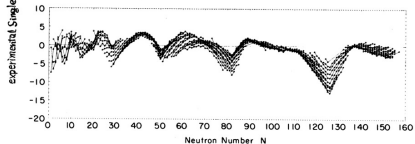
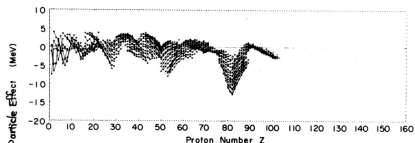
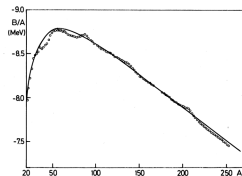
核子のスピン・アイソスピン自由度も考慮すると,  $(\mathbf{r}_j) \rightarrow (\mathbf{r}_j, s_j, t_j)$



スピン軌道力まで考慮すると，魔法数（2, 8, 20, 28, 50, 82, 126）が説明できる．

$$U = u(r) + \xi(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$$

## 結合エネルギー



変分法の試行関数としてスレーター行列式  $\Phi$  を採用する .  $\langle \mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_A | \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det[\varphi_i(\mathbf{r}_j)]$

エネルギーの期待値は

$$\langle \Phi | H | \Phi \rangle = \sum_{i=1}^A \frac{1}{2m} \langle \varphi_i | \mathbf{p}^2 | \varphi_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A \langle \varphi_i \varphi_j | v | \varphi_i \varphi_j \rangle - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A \langle \varphi_i \varphi_j | v | \varphi_j \varphi_i \rangle$$

( 運動エネルギー )      ( 直接項 )                      ( 交換項 )

一粒子波動関数  $\{\varphi_i\}$  を変化させて , エネルギーを最小化する .

$$\delta \langle \Phi | H | \Phi \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + U \right) |\varphi_i\rangle = \epsilon_i |\varphi_i\rangle$$

平均場  $U\psi(\mathbf{r}) = \int v(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \left( \sum_{j=1}^A |\varphi_j(\mathbf{r}')|^2 \right) d\mathbf{r}' \cdot \psi(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^A \int \varphi_j^*(\mathbf{r}') v(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \varphi_j(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$

- 平均場  $U$  は反対称化のため非局所 ( nonlocal ) となる .  $\langle \mathbf{r} | U | \mathbf{r}' \rangle \neq U(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$
- $\{\varphi_i\} \Leftrightarrow U$  を自己無撞着に解く . ( または  $\delta \langle \Phi | H | \Phi \rangle = 0$  を直接解く )

# Skyrme Hartree-Fock 計算

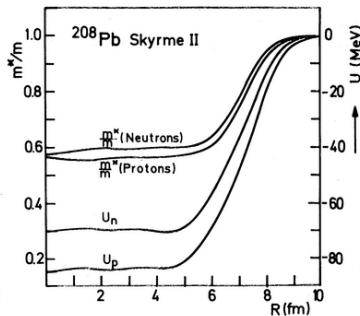
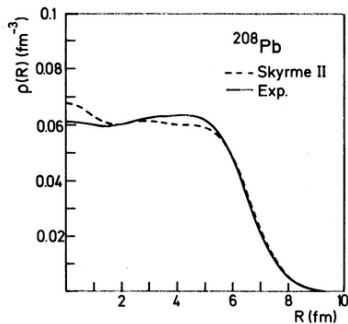
Skyrme 力 (有効相互作用)

$$\begin{aligned}
 v_{12} = & t_0(1 + x_0 P^\sigma)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\
 & + \frac{1}{2}t_1[\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}^2\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] + t_2\mathbf{k}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbf{k} \\
 & + iW_0(\sigma_1 + \sigma_2)\mathbf{k} \times \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbf{k} \\
 \mathbf{k} = & \frac{1}{2\hbar}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)
 \end{aligned}$$

有効質量

$$m^* = \frac{p}{v} = \frac{m}{1 + \frac{m}{p} \frac{\partial U}{\partial p}}$$

(at  $p = p_F$ )



Vauterin and Brink, Phys. Rev. C 5 (1972) 626.

# 対称性の破れによる多体相関の記述

HF は非線形

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + U[\Phi]\right) \psi_j(\mathbf{r}) = \epsilon_j \psi_j(\mathbf{r}), \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det[\psi_j(\mathbf{r}_i)]$$

もし平均場  $U$  が並進対称性を保つ  
⇨ 一粒子状態  $\psi_i$  は全部平面波  
この場合、原子核はできない。

平均場  $U(\mathbf{r})$  が並進対称性を破ることにより、  
原子核（多体相関）ができる。

- 全体を平行移動した状態  $e^{-i\hat{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{R}}\Phi$  も、  
同じエネルギー期待値を持つ。
- 原子核の内部運動が重心運動に影響されてしまう。

適切な取り扱い：運動量射影または GCM

$$\Psi = \int f(\mathbf{R}) e^{-i\hat{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{R}} \Phi d\mathbf{R}$$

1. 重イオン衝突の概観
2. 平均場理論
  - 静的な問題
  - 時間依存の平均場理論
3. 分子動力学
4. 一粒子的量子分岐による拡張
5. 熱平衡の観点から
6. クラスタ関連
7. 状態方程式と重イオン衝突

## 時間依存変分原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \langle \Phi(t) | \left( i\hbar \frac{d}{dt} - H \right) | \Phi(t) \rangle = 0 \quad \text{with} \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det[\varphi_i(\mathbf{r}_j, t)]$$

変分の意味:  $\varphi_i(\mathbf{r}, t) \rightarrow \varphi_i(\mathbf{r}, t) + \delta\varphi_i(\mathbf{r}, t)$     [ $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$ ]    [ $\delta\varphi_i(\mathbf{r}, t) = 0$  at  $t = t_1, t_2$ ]

- 厳密解が運良く  $\Phi(t)$  の形をしていれば, 厳密解が得られる.
- そうでない場合にも, 近似解が得られると期待する.(経路積分による理由付け)

一粒子波動関数の運動方程式 (TDHF 方程式)

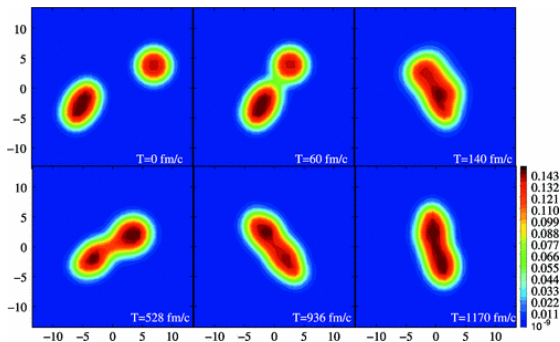
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + U(t) \right) \varphi_i(\mathbf{r}, t)$$

$$U(t)\psi(\mathbf{r}) = \int v(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \left( \sum_{j=1}^A |\varphi_j(\mathbf{r}', t)|^2 \right) d\mathbf{r}' \cdot \psi(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^A \int \varphi_j^*(\mathbf{r}', t) v(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \varphi_j(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

- 平均場はその時刻の波動関数によって決まる.
- 初期条件  $\{\varphi_i(\mathbf{r}, t=0)\}$  が与えられれば, 時間発展が計算できる.



# TDHF の計算例



TDHF time evolution for the  $^{22}\text{Ne} + ^{16}\text{O}$  collision at an impact parameter of  $b = 6.35$  fm and initial neon orientation angle  $\beta = 60^\circ$  using the SLy4 interaction. Initial energy is  $E_{\text{c.m.}} = 95$  MeV. During the evolution, the combined system makes four revolutions.

Umar and Oberacker, PRC 74 (2006) 024606.

さらに高エネルギーの衝突になると、平均場の効果以上のもの（二核子衝突）を取り入れる必要がある。

# 密度行列

密度演算子  $\hat{\rho}^{(A)} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  (規格化された純粋状態  $\Psi$  の場合)

一体密度演算子

$$\hat{\rho} = A \operatorname{Tr}_{2,\dots,A} \hat{\rho}^{(A)} \quad \text{つまり} \quad \langle \mathbf{r} | \hat{\rho} | \mathbf{r}' \rangle = A \int \cdots \int \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) \Psi^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) d\mathbf{r}_2 \cdots d\mathbf{r}_A$$

一体演算子  $\hat{O} = \hat{o}_1 + \hat{o}_2 + \cdots + \hat{o}_A$  の期待値は  $\langle \hat{O} \rangle = \operatorname{Tr}(\hat{o}\hat{\rho})$  で得られる. 特に  $\operatorname{Tr} \hat{\rho} = A$ .

## スレーター行列式の場合は

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \quad (\text{つまり射影演算子}) \quad \langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{なら} \quad \hat{\rho} = \sum_{i=1}^A |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

$\hat{\rho} \Leftrightarrow A$  個の1粒子波動関数  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_A$  が張る空間  $\Leftrightarrow$  スレーター行列式

二体密度演算子など, 何でも  $\hat{\rho}$  で書ける.

$$\hat{\rho}^{(2)} = A(A-1) \operatorname{Tr}_{3,\dots,A} \hat{\rho}^{(A)} = \mathcal{A}_{12} \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2, \quad \mathcal{A}_{12} = 1 - \mathcal{P}_{12}$$

$$\langle \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 | \hat{\rho}^{(2)} | \mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_2 \rangle = \langle \mathbf{r}_1 | \hat{\rho} | \mathbf{r}'_1 \rangle \langle \mathbf{r}_2 | \hat{\rho} | \mathbf{r}'_2 \rangle - \langle \mathbf{r}_1 | \hat{\rho} | \mathbf{r}'_2 \rangle \langle \mathbf{r}_2 | \hat{\rho} | \mathbf{r}'_1 \rangle$$

ハミルトニアン  $H = \sum_i \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2M} + \sum_{i < j} \hat{v}_{ij}$  のとき

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}^{(A)} = \sum_{i=1}^A \left[ \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2M}, \hat{\rho}^{(A)} \right] + \sum_{i < j} [\hat{v}_{ij}, \hat{\rho}^{(A)}] \quad (\text{厳密})$$

粒子 2, 3, ..., A についてトレースを取ると

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = \left[ \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M}, \hat{\rho} \right] + \text{Tr}_2 [\hat{v}_{12}, \hat{\rho}^{(2)}] \quad (\text{厳密})$$

一般に、二体相関  $\hat{\rho}^{(2)}$  が分からなければ一体密度の時間発展は決まらないが、スレーター行列式相当の近似をすれば、

$$\hat{\rho}_{12}^{(2)} = \mathcal{A}_{12} \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2 \quad \Rightarrow \quad i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = \left[ \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} + \hat{U}, \hat{\rho} \right], \quad \hat{U}_1 = \text{Tr}_2 \mathcal{A}_{12} \hat{v}_{12} \hat{\rho}_2$$

これは ( $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$  の場合は) TDHF 方程式と同じ。

わかりやすい導出にも見えるが、結局は二体相関を切る近似が正当化できるかという問題。

一体密度行列  $\hat{\rho}$  と等価なものとして、Wigner 関数（位置と運動量の関数）を使う。

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int \langle \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{s} | \hat{\rho} | \mathbf{r} + \frac{1}{2} \mathbf{s} \rangle e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{s} / \hbar} d\mathbf{s}$$

$$\text{規格化: } \text{Tr} \hat{\rho} = A \quad \Leftrightarrow \quad \iint f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = A$$

$$\text{密度: } \rho(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \hat{\rho} | \mathbf{r} \rangle = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

一般の一体演算子  $\hat{O} = \sum_{i=1}^A \hat{o}_i$  についても Wigner 変換を同様に定義する。

$$O(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int \langle \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{s} | \hat{o} | \mathbf{r} + \frac{1}{2} \mathbf{s} \rangle e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{s} / \hbar} d\mathbf{s}$$

$$\text{期待値: } \langle O \rangle = \text{Tr}(\hat{o} \hat{\rho}) = \iint O(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

- つまり、 $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  は位相空間の分布関数。
- $\sum_{i=1}^A \left( \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2M} + V(\hat{\mathbf{r}}_i) \right)$  の Wigner 変換は  $\frac{\mathbf{p}^2}{2M} + V(\mathbf{r})$  となる。ただし、HF の平均場は非局所なので、一粒子ハミルトニアン  $\hat{h} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} + \hat{U}$  の Wigner 変換は

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + U(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

TDHF 方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = \left[ \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} + \hat{U}, \hat{\rho} \right], \quad \hat{U}_1 = \text{Tr} \mathcal{A}_{12} \hat{v}_{12} \hat{\rho}_2$$

の両辺の Wigner 変換を考えると, Wigner 関数  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  についての方程式が得られる.

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} = \frac{2}{\hbar} h(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \sin \left[ \frac{\hbar}{2} \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}} \right) \right] f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (\text{TDHF 方程式})$$

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{p}, [f]) = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + U(\mathbf{r}, \mathbf{p}, [f])$$

半古典近似:  $\hbar$  の最低次のみを残すと

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \quad (\text{Vlasov 方程式})$$

---

演算子の積の Wigner 変換は Wigner 変換の積とはならない.

$$\text{W.T.}(\hat{h}\hat{\rho}) \neq h(\mathbf{r}, \mathbf{p})f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

本当は、密度行列  $\langle \mathbf{r}\sigma\tau | \hat{\rho} | \mathbf{r}'\sigma'\tau' \rangle$  や Wigner 関数  $f_{\sigma\tau, \sigma'\tau'}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  は、スピン自由度（およびアイソスピン自由度）については行列である。しかし、実際の応用ではスピン自由度については平均するか、対角的であると近似する。

$$f_{\sigma\tau, \sigma'\tau'}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_{\sigma\tau}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\tau\tau'}$$

- スピン軌道力が重要な場合には、これではまずいと思います。
- 他のところでは、スピン・アイソスピン  $\sigma\tau$  を省略した式を書きますが、適宜修正してください。

# Wigner 関数におけるパウリ原理

Wigner 関数は、位相空間での分布関数という意味を持つ。

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int \langle \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{s} | \hat{\rho} | \mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{s} \rangle e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}/\hbar} d\mathbf{s}$$

$$\langle O \rangle = \text{Tr}(\hat{o}\hat{\rho}) = \iint O(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

フェルミ粒子  $\Rightarrow$  任意の一粒子状態  $\varphi$  について  $0 \leq \langle \varphi | \hat{\rho} | \varphi \rangle \leq 1$  つまり  $0 \leq \text{Tr}(|\varphi\rangle\langle\varphi| \hat{\rho}) \leq 1$

$$|\varphi\rangle\langle\varphi| \text{ の Wigner 変換を } O_\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \text{ と書くと } 0 \leq \iint O_\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \leq 1$$

半古典的パウリ原理：  $0 \leq f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \leq 1$

- 実は  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  は負になることもあるし 1 を超えることもある。
- $\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}\hbar$  のガウス波束でならしたもの

$$F(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = \iint 8e^{-(1/\alpha)(\mathbf{r}-\mathbf{R})^2 - (\alpha/\hbar^2)(\mathbf{p}-\mathbf{P})^2} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \langle \mathbf{R}\mathbf{P}\alpha | \hat{\rho} | \mathbf{R}\mathbf{P}\alpha \rangle \quad (\text{伏見関数})$$

は  $0 \leq F(\mathbf{R}, \mathbf{P}) \leq 1$  を満たす。

- 位相空間  $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$  の体積  $(2\pi\hbar)^3$  が量子状態一個に対応する。

Vlasov 方程式

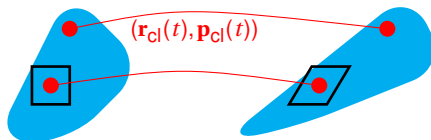
$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \quad (\text{Vlasov 方程式})$$

Vlasov 方程式にしたがって時間が経過してもパウリ原理は保たれる。

∴ Liouville の定理：古典軌道  $(\mathbf{r}_{\text{cl}}(t), \mathbf{p}_{\text{cl}}(t))$  に沿って  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  は一定。

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_{\text{cl}}(t) = \frac{\partial h(\mathbf{r}_{\text{cl}}, \mathbf{p}_{\text{cl}})}{\partial \mathbf{p}_{\text{cl}}}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{p}_{\text{cl}}(t) = - \frac{\partial h(\mathbf{r}_{\text{cl}}, \mathbf{p}_{\text{cl}})}{\partial \mathbf{r}_{\text{cl}}}$$

$$f(\mathbf{r}_{\text{cl}}(0), \mathbf{p}_{\text{cl}}(0), 0) = f(\mathbf{r}_{\text{cl}}(t), \mathbf{p}_{\text{cl}}(t), t)$$





位相空間分布を多数のテスト粒子  $(\mathbf{r}_k(t), \mathbf{p}_k(t))$  の分布として表す .

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{A}{N_{\text{TP}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{TP}}} (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_k(t))$$

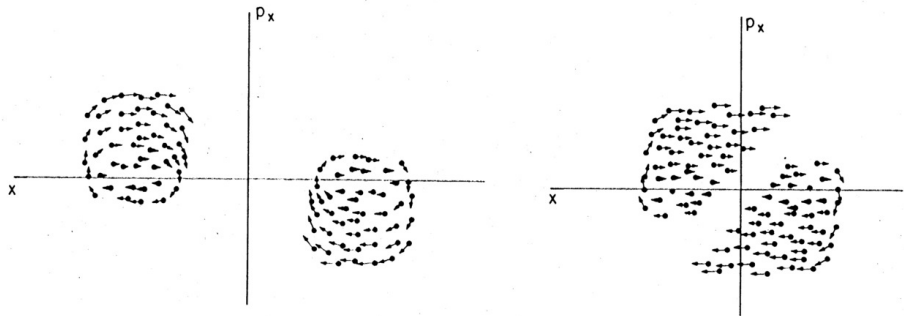
各テスト粒子は古典運動方程式に従って動くとする .

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{r}_k, \mathbf{p}_k}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{p}_k = - \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}_k, \mathbf{p}_k}$$

すると  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  は Vlasov 方程式の解である .

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}$$

## テスト粒子により解いた計算例



Bertsch and Das Gupta, Phys. Rep. 160 (1988) 189.

- 初期状態の原子核のそれぞれの中で，核子（テスト粒子）はフェルミ運動している．
- 各時刻で計算される平均場の中をテスト粒子が古典運動する．
- 座標空間で入射核と標的核が重なっても，位相空間では重なっていない．

C.Y. Wong, Phys. Rev. C25 (1982), 1460.

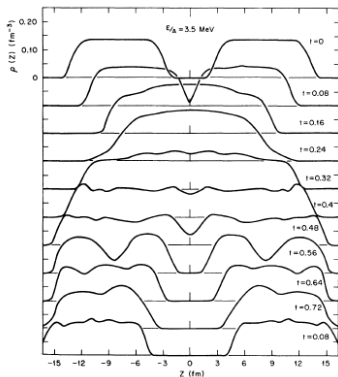


FIG. 1. The density profile in the pseudoparticle simulation for the collision of two slabs with  $\rho_1 = \rho_2 = 1.4 \text{ fm}^{-3}$  at the center-of-mass bombarding energy of  $E/A = 3.5 \text{ MeV}$ . The time scale is in units of  $10^{-2} \text{ sec}$ .

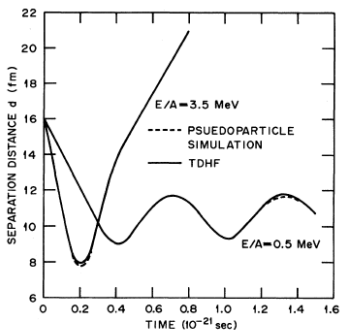
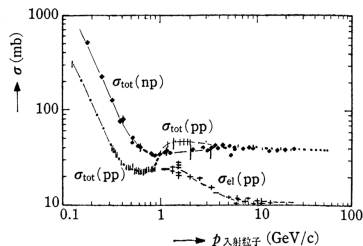


FIG. 2. The time dependence of the fragment separation coordinate  $d$  for the collision of two slabs at the center-of-mass bombarding energies of  $E/A = 0.5 \text{ MeV}$  and  $E/A = 3.5 \text{ MeV}$ . The results of the pseudoparticle simulation is given by the dashed line, while the TDHF results (from Fig. 8 of Ref. 6) are given by the solid line.

# 核子核子衝突

- 核子は平均場（一体場）による力を受け
- 他の核子と衝突（散乱）する。
  - 二核子の弾性散乱
  - 非弾性散乱（粒子生成）



スレーター行列式の中の二核子が衝突すると ...

$$e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} = e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \xrightarrow{\text{衝突}} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} f(\Omega_{12}) \frac{e^{ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \sum_a c_a \varphi_1^{(a)}(\mathbf{r}_1) \varphi_2^{(a)}(\mathbf{r}_2)$$

$$\det[\varphi_1(\mathbf{r}_1) \varphi_2(\mathbf{r}_2) \varphi_3(\mathbf{r}_3) \cdots \varphi_A(\mathbf{r}_A)] \xrightarrow{\text{衝突}} \sum_a c_a \det[\varphi_1^{(a)}(\mathbf{r}_1) \varphi_2^{(a)}(\mathbf{r}_2) \varphi_3(\mathbf{r}_3) \cdots \varphi_A(\mathbf{r}_A)]$$

衝突後はもはやスレーター行列式ではない ( $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$ ) が

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + U[\hat{\rho}], \hat{\rho} \right] + \text{衝突項}$$

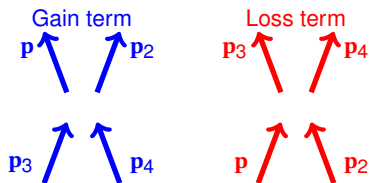
# VUU 方程式

VUU Eq. (BUU Eq., BNV Eq., ...)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + I_{\text{coll}}$$

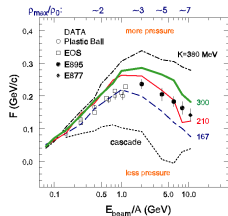
Collision term

$$I_{\text{coll}} = \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\Omega |v| \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_v \left\{ f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_4, t) [1 - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)] [1 - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t)] \right. \\ \left. - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) [1 - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t)] [1 - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_4, t)] \right\}$$

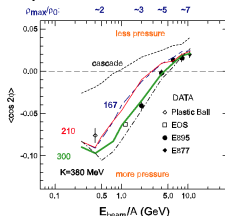


# 重イオン衝突から得られた対称核物質のEOS

## Transverse Flow



## Elliptic Flow



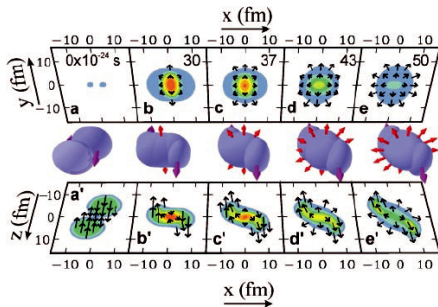
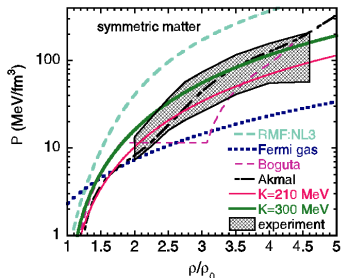
Danielewicz et al.,  
Science 298 (2002) 1592.

$$\tan \phi = p_x / p_y$$

$\langle \cos 2\phi \rangle$  : 膨張速度の指標



## Equation of State



# TDHF (時間依存変分原理) の非線形性

(TD)HF は非線形

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_j(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + U[\Phi] \right) \psi_j(\mathbf{r}, t) \quad \text{または} \quad i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + U[\hat{\rho}], \hat{\rho} \right]$$

初期状態を

$$|\Phi(0)\rangle = c_1 |\Phi_1(0)\rangle + c_2 |\Phi_2(0)\rangle$$

と分解してみる .  $|\Phi(0)\rangle, |\Phi_1(0)\rangle, |\Phi_2(0)\rangle$  はスレーター行列式とする .

- $|\Phi(0)\rangle \rightarrow \text{TDHF} \rightarrow |\Phi(t)\rangle$

- $|\Phi_1(0)\rangle \rightarrow \text{TDHF} \rightarrow |\Phi_1(t)\rangle$

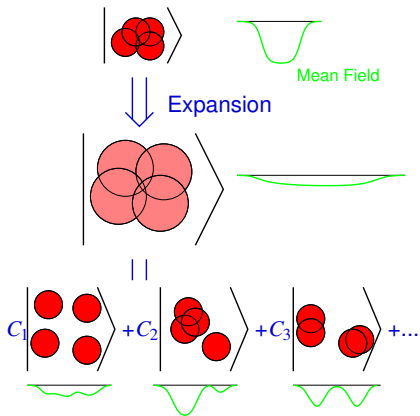
- $|\Phi_2(0)\rangle \rightarrow \text{TDHF} \rightarrow |\Phi_2(t)\rangle$

$$|\Phi(t)\rangle \neq c_1 |\Phi_1(t)\rangle + c_2 |\Phi_2(t)\rangle$$

つまり , 量子力学の重ね合わせの原理が成り立っていない .

- 勝手に分解してはいけない ?
- 分解して解いたら , 位相や干渉までは正しく計算できないだろう .
- うまく分解することにより近似がよくなるということが , あるかもしれない .

# 平均場理論でフラグメント生成を記述できるか？



- 平均場中の各粒子の自在な運動．例えば，系の集団的な膨張を記述する必要がある．  
— TDHF は得意．
- 一粒子波動関数の局在化．クラスターやフラグメントの生成に必要．  
— TDHF は苦手？
- 時間が進むに連れて，多数の反応チャンネルが出現しなければならない．  
— TDHF では無理．

## TDHF の修正が必要

- 系統的な拡張（多体相関を取り入れる）  
二核子衝突？
- 分子動力学の立場から見直す



1. 重イオン衝突の概観
2. 平均場理論
3. 分子動力学
  - 波束と運動方程式
  - 二核子衝突
4. 一粒子的量子分岐による拡張
5. 熱平衡の観点から
6. クラスタ関連
7. 状態方程式と重イオン衝突

## 分子動力学

系の粒子数と同じ個数の位置座標と運動量座標  $\mathbf{R}_k(t), \mathbf{P}_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, A$ ) の時間発展により, 系の運動や熱力学的性質を表す.

- 古典近似が非常によく成り立つ場合 (物性の系のイオン・原子・分子)
- 古典系でも量子系でも共通と考えられる特徴に限って調べる.
- 波束とすれば多少は量子力学的になって, 核子多体系にも直接使える. (QMD)

## 平均場理論 (TDHF や VUU/BUU) と比べた場合のメリットは?

- 少なくとも, 古典力学的な多体相関が入るという期待. (フラグメントなど)

## 分子動力学

系の粒子数と同じ個数の位置座標と運動量座標  $\mathbf{R}_k(t), \mathbf{P}_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, A$ ) の時間発展により, 系の運動や熱力学的性質を表す.

- 古典近似が非常によく成り立つ場合 (物性の系のイオン・原子・分子)
- 古典系でも量子系でも共通と考えられる特徴に限って調べる.
- 波束とすれば多少は量子力学的になって, 核子多体系にも直接使える. (QMD)
- フェルミ粒子だから, 反対称化する. (AMD)
- 波束の幅も力学変数にしたほうがよいのでは? (FMD)
- ガウス波束に限らず任意の一粒子波動関数にする? (TDHF は分子動力学ではない)

## 平均場理論 (TDHF や VUU/BUU) と比べた場合のメリットは?

- 少なくとも, 古典力学的な多体相関が入るという期待. (フラグメントなど)
- いずれにしても不十分. 一粒子波動関数を改良するより先に, ほかの改良をしたほうがよいかもしれない.

# 分子動力学のためのガウス波束

分子動力学では一粒子波動関数をガウス波束とする。

$$\varphi_i(\mathbf{r}, t) \propto e^{-\nu(\mathbf{r}-\mathbf{R}_i(t))^2} e^{i\mathbf{P}_i(t)\cdot\mathbf{r}/\hbar} \propto \exp\left[-\nu(\mathbf{r}-\mathbf{Z}_i(t)/\sqrt{\nu})^2\right] \quad \nu \text{ は幅のパラメータ}$$

Wigner 関数

$$\varphi_i(\mathbf{r}, t) \leftrightarrow f_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 8 \exp\left[-2\nu(\mathbf{r}-\mathbf{R}_i(t))^2 - \frac{1}{2\hbar^2\nu}(\mathbf{p}-\mathbf{P}_i(t))^2\right]$$

不確定性関係

$$\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}\hbar, \quad \Delta x^2 = \frac{1}{4\nu}, \quad \Delta p^2 = \hbar^2\nu$$

ガウス波束は、調和振動子の下降演算子の固有関数。

$$\mathbf{a}|\varphi_i\rangle = \mathbf{Z}_i|\varphi_i\rangle, \quad \mathbf{a} = \sqrt{\nu}\mathbf{r} + \frac{i}{2\hbar\sqrt{\nu}}\mathbf{p}$$

$\mathbf{Z}_i$  は複素数ベクトルで、実部・虚部が位置・運動量の期待値

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \mathbf{Z}_i = \sqrt{\nu}\mathbf{R}_i + \frac{i}{2\hbar\sqrt{\nu}}\mathbf{P}_i = \sqrt{\nu}\langle \mathbf{r} \rangle + \frac{i}{2\hbar\sqrt{\nu}}\langle \mathbf{p} \rangle$$

## Quantum Molecular Dynamics ( ガウス波束の直積 )

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A, t) = \varphi_1(\mathbf{r}_1, t) \varphi_2(\mathbf{r}_2, t) \cdots \varphi_A(\mathbf{r}_A, t)$$

$$\varphi_i(\mathbf{r}, t) \propto \exp\left[-v(\mathbf{r} - \mathbf{Z}_i(t))^2\right]$$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 8 \sum_{i=1}^A \exp\left[-2v(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i(t))^2 - \frac{1}{2\hbar^2 v}(\mathbf{p} - \mathbf{P}_i(t))^2\right]$$



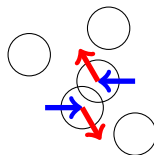
時間発展は “平均場” + 二核子衝突 ( VUU と類似 )

- 時間依存変分原理  $\Rightarrow$  運動方程式

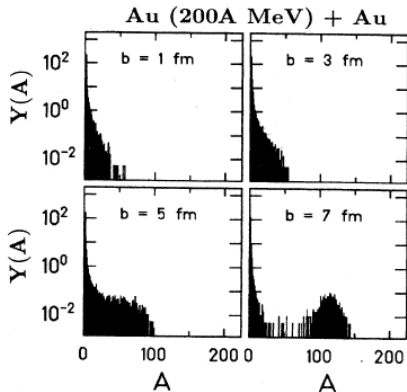
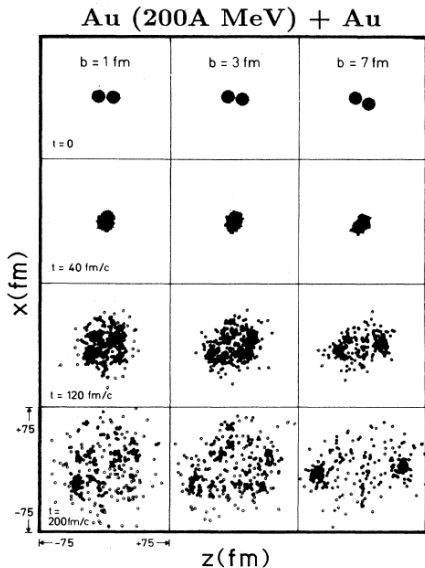
$$\frac{d}{dt} \mathbf{R}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}_i}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{R}_i}$$

$$\mathcal{H} = \langle \Phi | H | \Phi \rangle$$

- 二核子衝突 ( 散乱角はランダム )

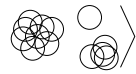


- 実際には,  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \propto \sum_i e^{-2v(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)^2} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}_i)$  とした計算がほとんど.
- 基底状態の原子核は記述が困難.



J. Aichelin, Phys. Rep. 202 (1991) 233.

## AMD wave function



$$|\Phi(Z)\rangle = \det_{ij} \left[ \exp \left\{ -v \left( \mathbf{r}_j - \frac{\mathbf{Z}_i}{\sqrt{v}} \right)^2 \right\} \chi_{\alpha_i}(j) \right]$$

$$\mathbf{Z}_i = \sqrt{v} \mathbf{D}_i + \frac{i}{2\hbar\sqrt{v}} \mathbf{K}_i$$

$v$ : Width parameter =  $(2.5 \text{ fm})^{-2}$

$\chi_{\alpha_i}$ : Spin-isospin states =  $p \uparrow, p \downarrow, n \uparrow, n \downarrow$

Time-dependent variational principle

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{\langle \Phi(Z) | (i\hbar \frac{d}{dt} - H) | \Phi(Z) \rangle}{\langle \Phi(Z) | \Phi(Z) \rangle} dt = 0, \quad \delta Z(t_1) = \delta Z(t_2) = 0$$

Equation of motion for the wave packet centroids  $Z$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Z}_i = \{ \mathbf{Z}_i, \mathcal{H} \}_{\text{PB}} \quad \text{or} \quad i\hbar \sum_{j=1}^A \sum_{\tau=x,y,z} C_{i\sigma,j\tau} \frac{dZ_{j\tau}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z_{i\sigma}}$$

Motion of wave packets in the mean field

(c.f.  $C_{i\sigma,j\tau} = \delta_{ij} \delta_{\sigma\tau}$  in QMD)

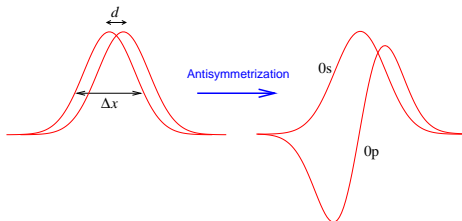
$$\mathcal{H} = \frac{\langle \Phi(Z) | H | \Phi(Z) \rangle}{\langle \Phi(Z) | \Phi(Z) \rangle} + (\text{c.m. correction}), \quad H: \text{Effective interaction (e.g. Skyrme force)}$$

## 二つの波束の反対称化

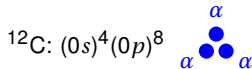
An example:

When two wave packets are located with a small distance (at  $-\mathbf{d}$  and  $+\mathbf{d}$ ),

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} \left[ e^{-v(\mathbf{r}_1+\mathbf{d})^2} \otimes e^{-v(\mathbf{r}_2-\mathbf{d})^2} \right] &\approx \mathcal{A} \left[ (1-2v\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}_1)e^{-v\mathbf{r}_1^2} \otimes (1+2v\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}_2)e^{-v\mathbf{r}_2^2} \right] \\
 &= \mathcal{A} \left[ (\phi_s(\mathbf{r}_1) - \epsilon \phi_p(\mathbf{r}_1)) \otimes (\phi_s(\mathbf{r}_2) + \epsilon \phi_p(\mathbf{r}_2)) \right] \quad (\epsilon = \sqrt{v}|\mathbf{d}|) \\
 &= \mathcal{A} \left[ \phi_s(\mathbf{r}_1)\phi_s(\mathbf{r}_2) \right] + \epsilon \mathcal{A} \left[ \phi_s(\mathbf{r}_1)\phi_p(\mathbf{r}_2) \right] \\
 &\quad - \epsilon \mathcal{A} \left[ \phi_p(\mathbf{r}_1)\phi_s(\mathbf{r}_2) \right] - \epsilon^2 \mathcal{A} \left[ \phi_p(\mathbf{r}_1)\phi_p(\mathbf{r}_2) \right] \\
 &= 2\epsilon \mathcal{A} \left[ \phi_s(\mathbf{r}_1)\phi_p(\mathbf{r}_2) \right]
 \end{aligned}$$



c.f. Harmonic oscillator shell model





## 二核子系の正準座標とパウリ禁止領域

二核子系の例（同じスピン・アイソスピン）

### 元の波束の中心

$Z_1, Z_2$  は正準座標ではない。

$$\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathbf{z} \neq \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{z}^*}$$

### 正準座標

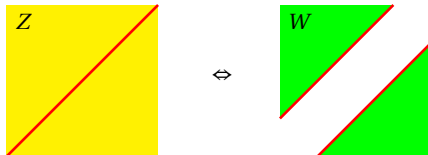
$$\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2) = \sqrt{\frac{1 + e^{-|\mathbf{z}|^2}}{1 - e^{-|\mathbf{z}|^2}}} \mathbf{z}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathbf{w} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{w}^*}$$

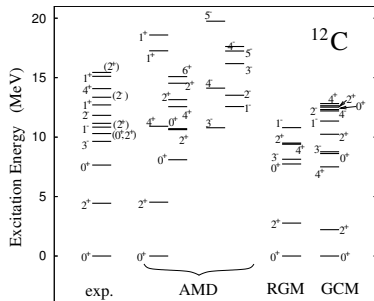
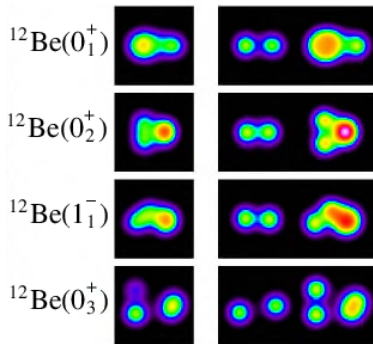
$\mathbf{z} \rightarrow 0$  の極限でも  $\mathbf{w}$  は有限値。

$$|\mathbf{w}| \rightarrow 2 \quad \text{as } \mathbf{z} \rightarrow 0 \quad (\text{常に } |\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2| > \sqrt{2})$$

一般に、パウリ原理により  $|\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2|$  はあまり小さくならないと解釈する。



Kanada-En'yo et al., Prog. Theor. Exp. Phys. 2012 01A202 (2012)



- 核構造計算では、複数の AMD 波動関数の重ねあわせを行なっている。  
(パリティ射影, 角運動量射影, 他の状態との直交化など)
- 反応計算では、単一の AMD 波動関数 (波束) の時間発展を扱う。

$$|\Phi(Z(t))\rangle \approx \sum_k c_k e^{-iE_k t/\hbar} |\Phi_k\rangle, \quad H|\Phi_k\rangle = E_k |\Phi_k\rangle$$

# 単一 AMD 波動関数による基底状態の計算

AMD 波動関数

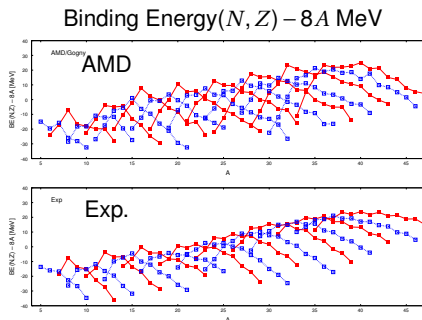
$$|\Phi(\mathbf{Z})\rangle = \det_{ij} \left[ \exp \left\{ -v(\mathbf{r}_i - \mathbf{Z}_j / \sqrt{v})^2 \right\} \chi_{\alpha_j}(i) \right]$$

エネルギーを最小化する  $\{\mathbf{Z}_j\}$  を探す .

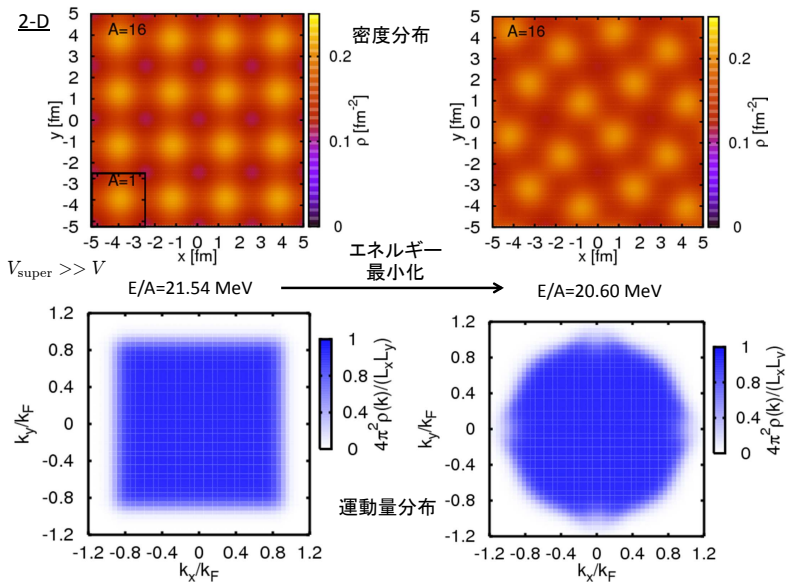
摩擦冷却法

$$i\hbar \sum_{j\tau} C_{i\sigma, j\tau} \frac{dZ_{j\tau}}{dt} = (\lambda + i\mu) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z_{i\sigma}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dt} < 0 \quad (\mu < 0)$$



## 2次元の無限系：密度と運動量分布



# 期待値の表式

非直交の二粒子状態のスレーター行列式

$$|\Phi\rangle = \mathcal{A} \left[ \varphi_1(\mathbf{r}_1)\varphi_2(\mathbf{r}_2)\cdots\varphi_A(\mathbf{r}_A) \right] \quad B_{ij} = \langle\varphi_i|\varphi_j\rangle \neq \delta_{ij}$$

密度演算子

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A |\varphi_j\rangle B_{ji}^{-1} \langle\varphi_i|, \quad \hat{\rho}^{(2)} = \mathcal{A}_{12} \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2$$

一粒子演算子

$$\hat{T} = \sum_{i=1}^A \hat{t}_i$$

$$\langle\hat{T}\rangle = \text{Tr}(\hat{t}\hat{\rho}) = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A \langle\varphi_i|\hat{t}|\varphi_j\rangle B_{ji}^{-1} \quad \sim A^2 \text{ terms}$$

二粒子演算子

$$\hat{V} = \sum_{i<j} \hat{v}_{ij}$$

$$\langle\hat{V}\rangle = \text{Tr}(\hat{v}\hat{\rho}^{(2)}) = \frac{1}{2} \sum_{ijkl=1}^A \langle\varphi_i\varphi_j|\hat{v}|\varphi_k\varphi_l\rangle (B_{ki}^{-1} B_{lj}^{-1} - B_{kj}^{-1} B_{li}^{-1}) \quad \sim A^4 \text{ terms}$$

AMD 波動関数に対応する Wigner 関数（位相空間分布）は

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 8 \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A e^{-(\mathbf{r}-\mathbf{R}_{ij})^2/2\Delta x^2} e^{-(\mathbf{p}-\mathbf{P}_{ij})^2/2\Delta p^2} B_{ij} B_{ji}^{-1}$$

ただし,  $\Delta x^2 = 1/4v$ ,  $\Delta p^2 = \hbar^2 v$ ,  $\mathbf{R}_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{v}}(\mathbf{Z}_i^* + \mathbf{Z}_j)$ ,  $\mathbf{P}_{ij} = i\hbar\sqrt{v}(\mathbf{Z}_i^* - \mathbf{Z}_j)$  .

- 反対称化のためかなり複雑．当然実数値ではあるが,  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) < 0$  となることもある．
- $B_{ij} B_{ji}^{-1}$  を  $\delta_{ij}$  に置き換えると, 反対称化がない QMD のような表式になる．

「物理座標」( $\mathbf{R}_k, \mathbf{P}_k$ ) をうまく導入すると, 以下のような近似ができるかもしれない．

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \approx 8 \sum_{k=1}^A e^{-(\mathbf{r}-\mathbf{R}_k)^2/2\Delta x^2} e^{-(\mathbf{p}-\mathbf{P}_k)^2/2\Delta p^2}$$

- あまりよい近似ではないので, エネルギー期待値の計算などには使い物にならない．
- 二核子衝突の際には「物理座標」を利用する．

## Cogny 力

$$v_{ij} = \sum_{k=1,2} (W_k + B_k P_\sigma - H_k P_\tau - M_k P_\sigma P_\tau) e^{-(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 / a_k^2} + t_\rho (1 + P_\sigma) \rho(\mathbf{r}_i)^\sigma \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^A \sum_{l=1}^A \langle ij | v | kl - lk \rangle B_{ki}^{-1} B_{lj}^{-1} \quad \sim A^4$$

Wigner 関数を使うと次のようにも書ける .

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \langle \alpha\beta | v(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) | \alpha\beta \rangle \rho_\alpha(\mathbf{r}_1) \rho_\beta(\mathbf{r}_2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d\mathbf{R} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^3} \langle \alpha\beta | \tilde{v}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) | \beta\alpha \rangle f_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{p}_1) f_\beta(\mathbf{R}, \mathbf{p}_2) \end{aligned}$$

$\alpha, \beta$  はスピン・アイソスピン状態 ( $p \uparrow, p \downarrow, n \uparrow, n \downarrow$ ) また,  $\tilde{v}(\mathbf{p}) = \int e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} v(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ .

## Skyrme 力

$$\begin{aligned}
 v_{ij} = & t_0(1 + x_0 P_\sigma) \delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} t_1(1 + x_1 P_\sigma) [\delta(\mathbf{r}) \mathbf{k}^2 + \mathbf{k}^2 \delta(\mathbf{r})] & \mathbf{r} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \\
 & + t_2(1 + x_2 P_\sigma) \mathbf{k} \cdot \delta(\mathbf{r}) \mathbf{k} + t_3(1 + x_3 P_\sigma) [\rho(\mathbf{r}_i)]^\alpha \delta(\mathbf{r}) & \mathbf{k} = \frac{1}{2\hbar} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)
 \end{aligned}$$

相互作用エネルギーの期待値はいくつかの「密度」の空間積分で書ける．

$$\langle V \rangle = \int \mathcal{V}(\rho(\mathbf{r}), \tau(\mathbf{r}), \Delta\rho(\mathbf{r}), \mathbf{j}(\mathbf{r})) d\mathbf{r} \quad \sim A^2 \times \text{Volume}$$

$$\rho_\alpha(\mathbf{r}) = \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \alpha} e^{-2\nu(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij})^2} B_{ij} B_{ji}^{-1}, \quad \mathbf{R}_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{\nu}} (\mathbf{Z}_i^* + \mathbf{Z}_j)$$

$$\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{p}}{M} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \alpha} \frac{\mathbf{p}_{ij}}{M} e^{-2\nu(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij})^2} B_{ij} B_{ji}^{-1}, \quad \mathbf{p}_{ij} = i\hbar\sqrt{\nu}(\mathbf{Z}_i^* - \mathbf{Z}_j)$$

$$\tau_\alpha(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{p}^2}{M^2} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \alpha} \frac{\mathbf{p}_{ij}^2 + 3\hbar^2\nu}{M^2} e^{-2\nu(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij})^2} B_{ij} B_{ji}^{-1}$$

(有限レンジ相互作用との関係)



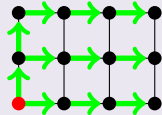
## Sugawa-Horiuchi による方法

Sugawa & Horiuchi, PTP105 (2001) 131

$$\rho(\mathbf{r}) = \left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A e^{-2\nu(\mathbf{r}-\mathbf{R}_{ij})^2} B_{ij} B_{ji}^{-1} = \left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-2\nu\mathbf{r}^2} \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A e^{-4\nu\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}_{ij}} B_{ij} B_{ji}^{-1} e^{-2\nu\mathbf{R}_{ij}^2}$$

和の中身  $C_{ij}(\mathbf{r})$  は  $\mathbf{r}$  について等比数列。

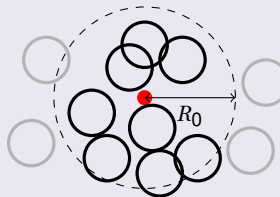
$$C_{ij}(\mathbf{r} + \mathbf{n}a) = C_{ij}(\mathbf{r}) e^{-4\nu a \mathbf{R}_{ij} \cdot \mathbf{n}}$$



## 空間距離によるカットオフ

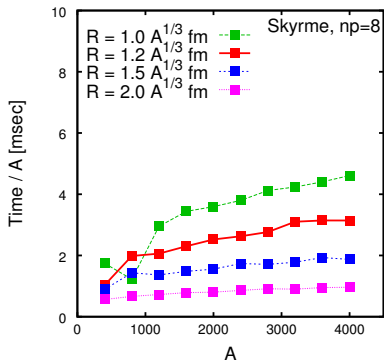
ある点  $\mathbf{r}$  の密度には，そこから遠く離れた波束は寄与しない。

$$\rho(\mathbf{r}) = \left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_i^{|\mathbf{D}_i - \mathbf{r}| < R_0} \sum_j^{|\mathbf{D}_j - \mathbf{r}| < R_0} e^{-2\nu(\mathbf{r}-\mathbf{R}_{ij})^2} B_{ij} B_{ji}^{-1}, \quad R_0 \approx 10 \text{ fm}$$



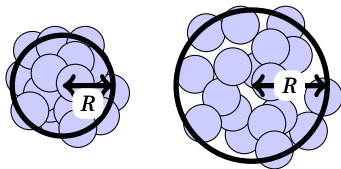
ふたつの技法を組み合わせるのが少し工夫を要するところ。

# Efficiency of numerical computation



CPU time **per nucleon** for a computation of

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial Z_k^*} \langle V \rangle; \quad k = 1, 2, \dots, A \right\}$$



CPU time  $\sim c(\rho) \times A^{1+\epsilon}$ .  $c(\rho)$  is small for lower densities.

- 時間依存シュレディンガー方程式の解（調和振動子の場合）
- 時間依存シュレディンガー方程式の解（自由粒子の場合）
- FMD
- なぜ採用しないか

# ゼロ点運動エネルギー = 波束の運動量幅

## Wigner 関数 (位相空間分布)

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 8 \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A e^{-(\mathbf{r}-\mathbf{R}_{ij})^2/2\Delta x^2} e^{-(\mathbf{p}-\mathbf{P}_{ij})^2/2\Delta p^2} B_{ij} B_{ji}^{-1}$$

ただし,  $\Delta x^2 = 1/4\nu$ ,  $\Delta p^2 = \hbar^2\nu$ ,  $\mathbf{R}_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{\nu}}(\mathbf{Z}_i^* + \mathbf{Z}_j)$ ,  $\mathbf{P}_{ij} = i\hbar\sqrt{\nu}(\mathbf{Z}_i^* - \mathbf{Z}_j)$  .

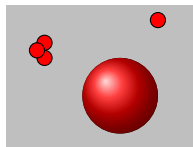
## 運動エネルギーの期待値

$$\langle K \rangle = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A \frac{\mathbf{P}_{ij}^2}{2M} B_{ij} B_{ji}^{-1} + \frac{3\Delta p^2}{2M} A$$

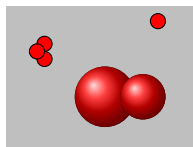
ゼロ点エネルギーは実在する. ただし, フラグメントの重心運動のゼロ点エネルギーは除く.

$$\mathcal{K} \text{ in } \mathcal{H} = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A \frac{\mathbf{P}_{ij}^2}{2M} B_{ij} B_{ji}^{-1} + \frac{3\Delta p^2}{2M} (A - N_{\text{frg}}(Z))$$

$N_{\text{frg}}(Z) \in \mathbb{R}$  はフラグメント数 (実数値).



$$N_{\text{frg}}(Z) = 3.0$$

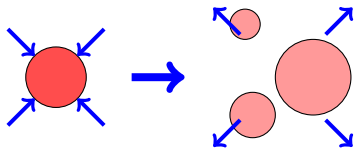


$$N_{\text{frg}}(Z) = 3.6$$

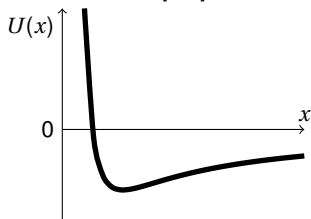
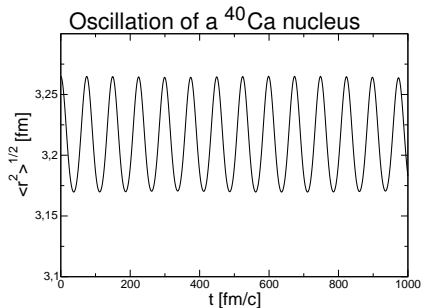
小振幅



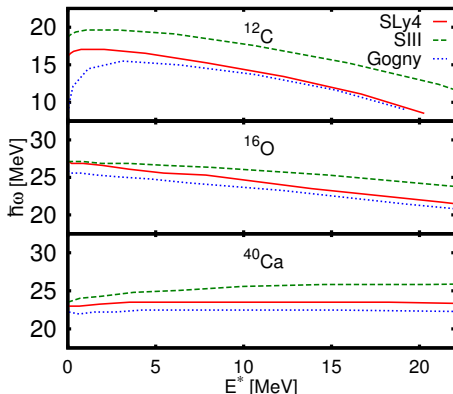
大振幅



- 状態方程式（圧縮率）と関連
- クラスタも重要な場合も



# 振動数の相互作用依存性



|                               | Gogny  | SLy4   | SIII   |
|-------------------------------|--------|--------|--------|
| $\rho_0$ [ $\text{fm}^{-3}$ ] | 0.166  | 0.160  | 0.145  |
| $E/A$ [MeV]                   | -16.32 | -15.97 | -15.86 |
| $K$ [MeV]                     | 228    | 230    | 355    |
| $m^*/m$                       | 0.67   | 0.70   | 0.76   |
| $J$ [MeV]                     | 30.8   | 32.0   | 28.2   |

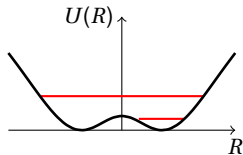
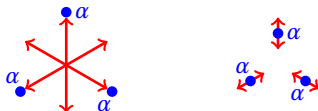
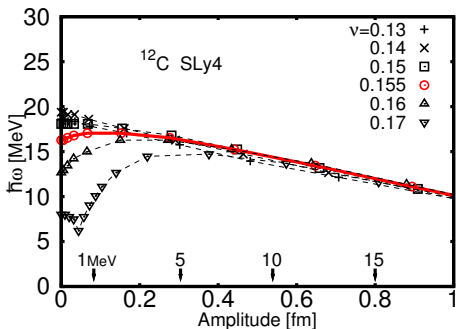
- 振動数は確かに状態方程式を反映しているようである。
- 振幅が大きくなると振動数が減少する。(非調和性)
- $E^* \approx \hbar\omega$  のあたりを見るのが適当か。

# 原子核の振動の際の波束の運動

$^{12}\text{C}$  の振動 (SLy4)

Furuta et al., PRC82 (2010) 034307.

Frequency  $\hbar\omega$  as a function of amplitude  
for different width parameters  $\nu$



- ある程度振幅が大きければ, 振動数は波束幅  $\nu$  の選択に依らない.
- 振幅が大きくなると振動数が減少する.(非調和性)
- $E^* \approx \hbar\omega$  のあたりを見るのが適当か.

1. 重イオン衝突の概観
2. 平均場理論
3. 分子動力学
  - 波束と運動方程式
  - 二核子衝突
4. 一粒子的量子分岐による拡張
5. 熱平衡の観点から
6. クラスタ関連
7. 状態方程式と重イオン衝突



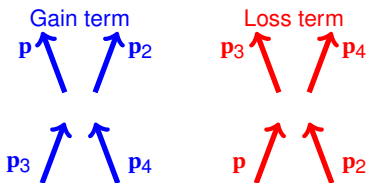
## 二核子衝突 — VUU の場合

VUU Eq. (BUU Eq., BNV Eq., ...)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + I_{\text{coll}}$$

Collision term

$$I_{\text{coll}} = \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\Omega |v| \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_v \left\{ \begin{aligned} & f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_4, t) [1 - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)] [1 - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t)] \\ & - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) [1 - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t)] [1 - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_4, t)] \end{aligned} \right\}$$



# 多段階直接反応 (独立粒子近似)

Kawai & Weidenmüller, PRC 45 (1992) 1856.

Watanabe et al., PRC 59 (1999) 2136.

核子入射反応:  $\mathbf{k}_i \rightarrow \mathbf{k}_f$ , 標的核は  $\Phi_0 \rightarrow \Phi_f$

$$\sigma_{fi} = \frac{1}{k_i^2} \left| \langle \chi_f^{(-)} \Phi_f | V + VGV + VGVGV + \dots | \Phi_0 \chi_i^{(+)} \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i)$$

$$\approx \frac{1}{k_i^2} \sum_{N=1}^{\infty} \left| \langle \chi_f^{(-)} \Phi_f | V(GV)^{N-1} | \Phi_0 \chi_i^{(+)} \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i)$$

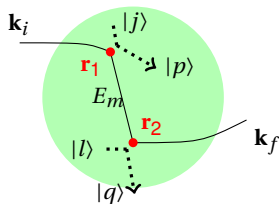
例えば, 2段階過程からの寄与は

$$\sigma_{fi}^{(2)} = \frac{1}{k_i^2} \left| \langle \chi_f^{(-)} \Phi_f | VGV | \Phi_0 \chi_i^{(+)} \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i)$$

$$\approx \frac{1}{k_i^2} \left| \langle \chi_f^{(-)} \Phi_f | V | a_l^\dagger a_q \Phi_f \rangle \frac{1}{E_m^+ - t - U} (a_p^\dagger a_j \Phi_0 | V | \Phi_0 \chi_i^{(+)} \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i)$$

$$= \frac{1}{k_i^2} \left| \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \chi_f^{(-)}(\mathbf{r}_2)^* v_{ql}(\mathbf{r}_2) G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, E_m) v_{pj}(\mathbf{r}_1) \chi_i^{(+)}(\mathbf{r}_1) \right|^2 \delta(E_f - E_i)$$

確率は  $|\sum \text{振幅}|^2$  であって,  $\sum |\text{振幅}|^2$  ではない.



- Never-come-back 近似
- $\Phi_f = a_p^\dagger a_q^\dagger a_j a_l \Phi_i$
- 中間状態も独立粒子模型
- $V = \sum_{i=1}^A v(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i)$
- 反対称化は無視

## 多段階直接反応（さらに局所半古典近似）

$$\sigma_{fi}^{(2)} = \frac{1}{k_i^2} \left| \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \chi_f^{(-)}(\mathbf{r}_2)^* v_{ql}(\mathbf{r}_2) G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, E_m) v_{pj}(\mathbf{r}_1) \chi_i^{(+)}(\mathbf{r}_1) \right|^2 \delta(E_f - E_i)$$

$$\left| \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right|^2 = \iiint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2 F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) F^*(\mathbf{r}_1 + \mathbf{s}_1, \mathbf{r}_2 + \mathbf{s}_2)$$

ある程度終状態  $f$  で平均化すれば  $\mathbf{s}_1 \approx 0, \mathbf{s}_2 \approx 0$  のところしか効かないので，局所的に平面波に置き換える近似をする．

- $\chi_i^{(+)}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{s}_1) \approx e^{i\mathbf{k}_i(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{s}_1} \chi_i^{(+)}(\mathbf{r}_1)$
- $v_{pj}(\mathbf{r} + \mathbf{s}) = \int \phi_p^*(\mathbf{x}) v(\mathbf{r} + \mathbf{s} - \mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \phi_p^*(\mathbf{x} + \mathbf{s}) v(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x} + \mathbf{s}) d\mathbf{x} \approx e^{i(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_p) \cdot \mathbf{s}} v_{pj}(\mathbf{r})$
- $G(\mathbf{r}_2 + \mathbf{s}_2, \mathbf{r}_1 + \mathbf{s}_2, E_m) \approx -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{i\mathbf{k}_m \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} e^{-i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{s}_1 + i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{s}_2}, \quad \mathbf{k}_m = \sqrt{\frac{2\mu(E_m - U)}{\hbar^2}} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$
- 

$\mathbf{s}_1$  と  $\mathbf{s}_2$  についての積分  $\Rightarrow$  運動量保存のデルタ関数

$$\sigma_{fi}^{(2)} = \frac{(2\pi)^6}{k_i^2} \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 |\chi_i^{(-)}(\mathbf{r}_1)|^2 |v_{pj}(\mathbf{r}_1)|^2 \delta(\mathbf{k}_m + \mathbf{p}_p - \mathbf{k}_i(\mathbf{r}_1) - \mathbf{p}_j) \times |G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, E_m)|^2$$

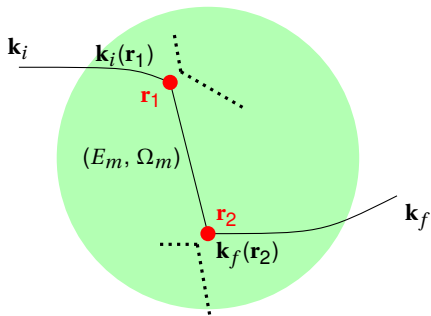
$$\times |\chi_f^{(-)}(\mathbf{r}_2)|^2 |v_{ql}(\mathbf{r}_2)|^2 \delta(\mathbf{k}_f(\mathbf{r}_2) + \mathbf{p}_q - \mathbf{k}_m - \mathbf{p}_l) \delta(E_f - E_i)$$

## 多段階直接反応（最終結果）

2段階過程による散乱断面積（標的核の終状態については和を取ったもの）

$$\frac{\partial^2 \sigma^{(2)}}{\partial E_f \partial \Omega_f} = \left(\frac{A}{A+1}\right)^4 \int dE_m \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \frac{k_f}{k_f(\mathbf{r}_2)} \frac{k_i(\mathbf{r}_1)}{k_i} \\ \times |\chi_i^{(+)}(\mathbf{r}_1)|^2 \times \left(\frac{\partial^2 \sigma_{NN}}{\partial E_m \partial \Omega_m}\right)_{\mathbf{r}_1} \rho(\mathbf{r}_1) \times \frac{e^{-2\gamma_m |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \times \left(\frac{\partial^2 \sigma_{NN}}{\partial E_f \partial \Omega_f}\right)_{\mathbf{r}_2} \rho(\mathbf{r}_2) \times |\chi_f^{(-)}(\mathbf{r}_2)|^2$$

- 二つの散乱点  $\mathbf{r}_1$  と  $\mathbf{r}_2$  .  
 $\mathbf{r}_1$  から  $\mathbf{r}_2$  へ向かう方角  $\Omega_m$  .
- $\mathbf{r}_1$  と  $\mathbf{r}_2$  で散乱する確率  
 $\leftarrow$  二核子衝突断面積と標的核密度  
 この二核子衝突断面積の定義には、パウリブロッッキングや標的核子のフェルミ分布が含まれる .
- $\mathbf{r}_1$  と  $\mathbf{r}_2$  以外で散乱する確率を減ずる .  
 （光学ポテンシャルの虚部）



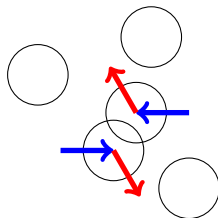
モンテカルロシミュレーション（カスケード計算）を正当化

# AMD における二核子衝突 (very old version)

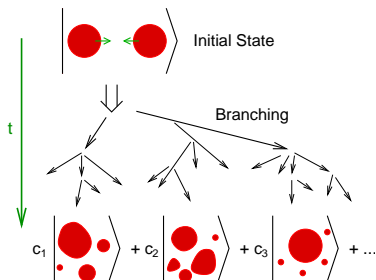
確率的に起こる二核子衝突

- 衝突断面積  $\frac{d\sigma_{NN}}{d\Omega}(E, \theta)$  (媒質中)
- パウリブロッキングは考慮 (AMD ではほぼ自動的)

Ono, Horiuchi et al., Prog. Theor. Phys. 87 (1992) 1185.



$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i)$$



確率的な 運動方程式

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Z}_i = \{\mathbf{Z}_i, \mathcal{H}\}_{\text{PB}} + (\text{NN collisions})$$

$$\langle T \rangle = \sum_i \sum_j \langle \varphi(\mathbf{Z}_i) | t | \varphi(\mathbf{Z}_j) \rangle B_{ji}^{-1} \quad \text{波束の中心 } \mathbf{Z} \text{ は直接的には物理的意味を持たない。}$$

反対称化の効果を簡便に扱うために「物理座標  $\mathbf{W}$ 」を導入する。

Wigner 関数

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= 8 \sum_{ij} e^{-2(\mathbf{u}^* - \mathbf{Z}_i^*) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{Z}_j)} B_{ij} B_{ji}^{-1} \\ &\sim 8 \sum_i e^{-2|\mathbf{u} - \mathbf{W}_i|^2}, \quad \mathbf{u} = \sqrt{v}\mathbf{r} + \frac{i}{2\hbar\sqrt{v}}\mathbf{p} \\ \mathbf{W}_i &= \sum_j \left( \sqrt{Q(\mathbf{Z})} \right)_{ij} \mathbf{Z}_j = \sqrt{v}\mathbf{R}_i + \frac{i}{2\hbar\sqrt{v}}\mathbf{P}_i \quad Q_{ij} = B_{ij} B_{ji}^{-1} \end{aligned}$$

例えば、軌道角運動量の期待値は

$$\langle \mathbf{L} \rangle = \sum_{ij} (\mathbf{Z}_i^* \times \mathbf{Z}_j) B_{ij} B_{ji}^{-1} = \sum_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{P}_i$$

二核子系の例 (同じスピン・アイソスピン)

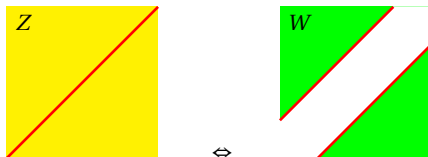
$$\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2), \quad \mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2)$$

$$\mathbf{w} = \sqrt{\frac{1 + e^{-|\mathbf{z}|^2}}{1 - e^{-|\mathbf{z}|^2}}} \mathbf{z}$$

$\mathbf{z} \rightarrow 0$  の極限でも  $\mathbf{w}$  は有限値 .

$$|\mathbf{w}| \rightarrow 2 \quad \text{as } \mathbf{z} \rightarrow 0 \quad (\text{Always } |\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2| > \sqrt{2})$$

一般に, パウリ原理により  $|\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_j|$  はあまり小さくならないと解釈する. ( $|\Psi(\mathbf{Z})\rangle = 0$  となる特異点を除き,  $\mathbf{Z}$  は任意の値が許される.)



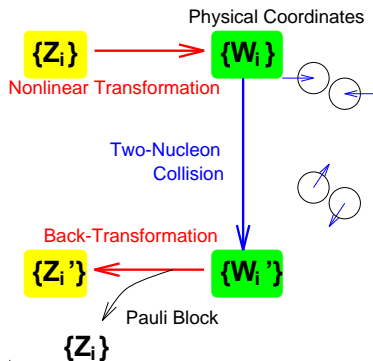
$$\mathbf{Z}_i = \sum_j (\sqrt{Q})_{ij} \mathbf{W}_j$$

# 物理座標を用いた二核子衝突

AMD の二核子衝突では物理座標を利用する . PTP87 (1992) 1185

$$\mathbf{W}_k = \sum_j \left( \sqrt{Q(Z)} \right)_{kj} \mathbf{Z}_j = \sqrt{v} \mathbf{R}_k + \frac{i}{2\hbar\sqrt{v}} \mathbf{P}_k, \quad f_{\mathbf{W}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 8 \sum_{k=1}^A e^{-2v(\mathbf{r}-\mathbf{R}_k)^2 - (\mathbf{p}-\mathbf{P}_k)^2/2\hbar^2v}$$

波束 1 と波束 2 の衝突:  $(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3, \dots, \mathbf{W}_A) \Rightarrow (\mathbf{W}'_1, \mathbf{W}'_2, \mathbf{W}_3, \dots, \mathbf{W}_A)$



$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{P}_{\text{tot}} + \mathbf{P}_{\text{rel}}$$

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{P}_{\text{tot}} - \mathbf{P}_{\text{rel}}$$

$$\Downarrow d\sigma_{NN}/d\Omega$$

$$\mathbf{P}'_1 = \frac{1}{2} \mathbf{P}_{\text{tot}} + p'_{\text{rel}} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{P}'_2 = \frac{1}{2} \mathbf{P}_{\text{tot}} - p'_{\text{rel}} \hat{\mathbf{n}}$$



## 二核子衝突の判定

- 物理座標で近似的に考える .

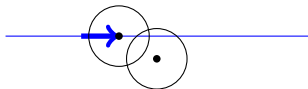
$$f_W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 8 \sum_{k=1}^A e^{-2v(\mathbf{r}-\mathbf{R}_k)^2 - (\mathbf{p}-\mathbf{P}_k)^2/2\hbar^2v}$$

各タイムステップ  $dt$  で , 全ての核子対について衝突するかどうか判定する .

- 衝突の確率は密度の重なりと相対速度に比例する .

$$P(\mathbf{r})|d\mathbf{r}| = \alpha e^{-v\mathbf{r}^2} |d\mathbf{r}|, \quad \mathbf{r} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - dt)$$



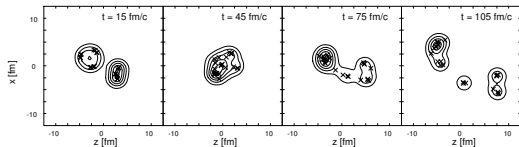
- パラメータ  $\alpha = f(v\sigma_{NN})$  は衝突断面積  $\sigma_{NN}$  から決まる . (二核子が衝突するまで直線運動すると仮定したときに断面積が  $\sigma_{NN}$  となるように)

$$\int_0^\infty 2\pi b db \left[ 1 - e^{-\int_{-\infty}^\infty P(\mathbf{b}+\mathbf{z}) dz} \right] = \sigma_{NN}$$

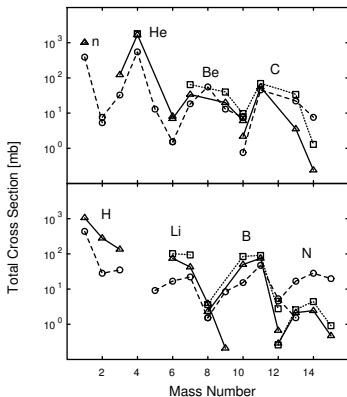
- 以下の場合にはパウリブロック (衝突を取り消し) する .

- $W' \rightarrow Z'$  の変換が存在しない場合 , または ,
- 衝突に関わった核子  $i$  の位相空間近傍  $|W_k - W'_i| < 1.348$  に別の核子  $k$  (同じスピン・アイソスピン) が存在していた場合 .

# Fragmentation of $^{12}\text{C}$ Projectile

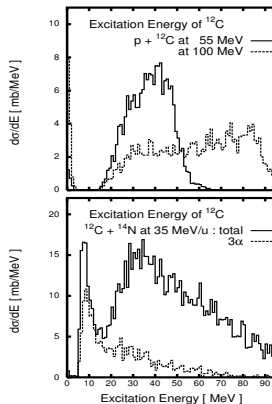


$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$  at 28.7 MeV/u



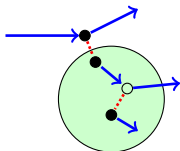
AO et al., PTP 87 (1992) 1185.

Takemoto et al., PRC 54 (1996) 266.

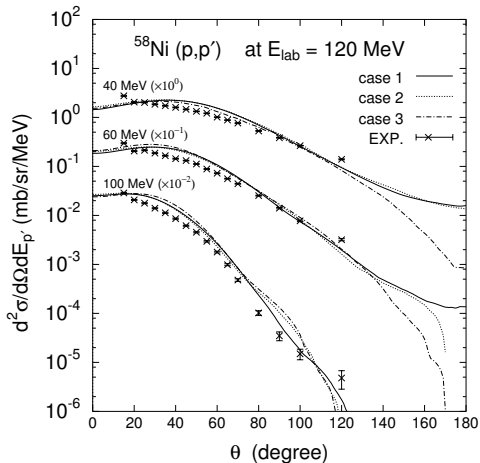


E.I. Tanaka, Ono, Horiuchi, Tomoyuki Maruyama, Engel,  
PRC 52 (1995) 316.

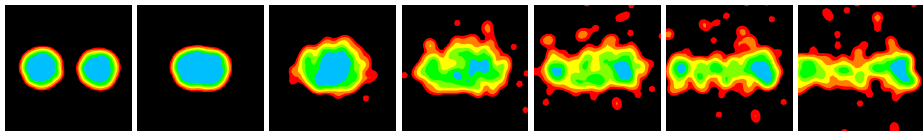
$^{58}\text{Ni}(p, p')$  at 120 MeV



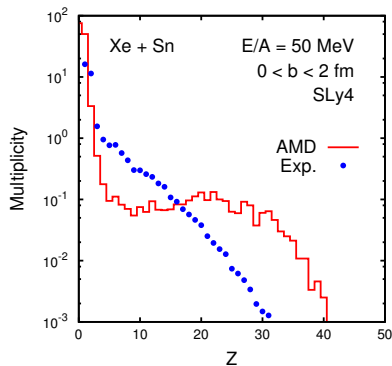
AMD の計算は、実験データを大体よく再現しているといえるが、前方で問題があるようにも見える。



# Multifragmentation(?) in Xe + Sn Collisions



Xe + Sn central collisions at 50 MeV/u



- AMD with NN collisions
- INDRA data, Hudan et al., PRC 67 (2003)

|             | AMD  | INDRA |
|-------------|------|-------|
| $M(p)$      | 40.2 | 8.4   |
| $M(\alpha)$ | 2.5  | 10.1  |

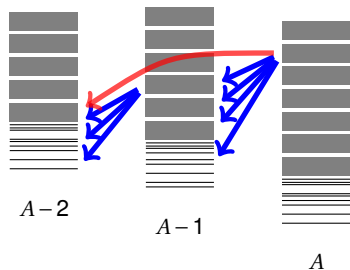
- Expansion is not sufficient.
- Too many nucleons are emitted.

# フラグメントの統計崩壊

AMD 計算の終状態 ( $t \sim$  数百 fm/c) にできているフラグメントはまだ励起している．その崩壊は統計崩壊モデルにより計算する．

## 計算のインプット

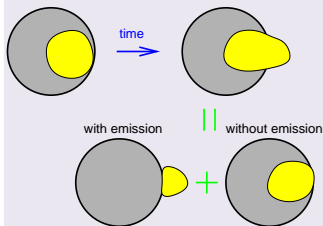
- 原子核の結合エネルギー（質量）
- 原子核の励起準位または準位密度
- 原子核の半径 ( $\Rightarrow T_L$ )



崩壊レート  $(Z_1, A_1, E_1, J_1) \rightarrow (Z_2, A_2, E_2, J_2) + (Z_3, A_3, E_3, J_3)$

$$\Gamma = \frac{\rho_2(E_2, J_2)\rho_3(E_3, J_3)}{2\pi\rho_1(E_1, J_1)} \sum_{J_{23}=|J_2-J_3|}^{J_2+J_3} \sum_{L=|J_1-J_{23}|}^{J_1+J_{23}} T_L(E_1 - E_2 - E_3)$$

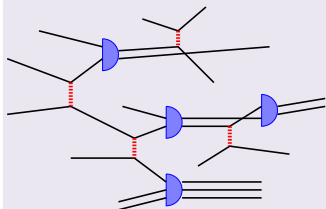
# AMD 拡張の二つの方向



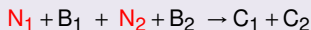
Wave-packet splitting: Give fluctuation to each wave packet centroid, based on the **single-particle motion**.

$$\frac{d}{dt} Z = \{Z, \mathcal{H}\}_{\text{PB}} + (\text{NN Collision}) \\ + (\text{W.P. Splitting}) + (\text{E. Conservation})$$

AO and Horiuchi, PPNP53 (2004) 501



At each two-nucleon collision, **cluster formation** is considered for the final state.



$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle CC | V_{NN} | NBNB \rangle|^2 \delta(\mathcal{H} - E)$$

AO, J. Phys. Conf. Ser. 420 (2013) 012103

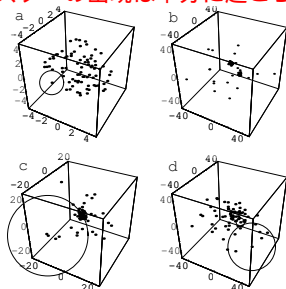
1. 重イオン衝突の概観
2. 平均場理論
3. 分子動力学
4. 一粒子的量子分岐による拡張
  - 波束の分岐
  - 確率的平均場理論との比較
5. 熱平衡の観点から
6. クラスタ相関
7. 状態方程式と重イオン衝突

## 波束が広がっていくことを許すと ...

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Z}_i(t) = \{\mathbf{Z}_i, \mathcal{H}\}_{\text{PB}}, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{v}_i(t) = \{\mathbf{v}_i, \mathcal{H}\}_{\text{PB}}$$

- FMD (Feldmeier et al.)
- QMD with dynamical width (Toshiki Maruyama et al.)
- Kiderlen and Danielewicz, Nucl. Phys. A620 (1997) 346.
- M. Colonna and Ph. Chomaz, Phys. Lett., B436 (1998) 1.

クラスタの出現は十分に起こらない.



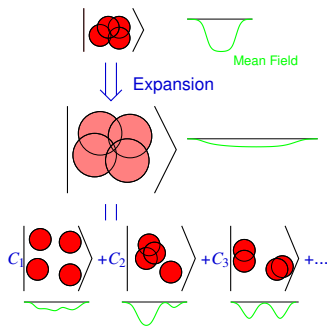
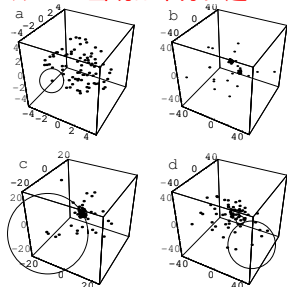


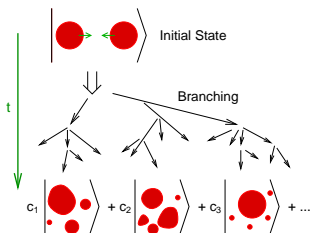
# 波束が広がっていくことを許すと ...

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Z}_i(t) = \{\mathbf{Z}_i, \mathcal{H}\}_{\text{PB}}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{v}_i(t) = \{\mathbf{v}_i, \mathcal{H}\}_{\text{PB}}$$

- FMD (Feldmeier et al.)
- QMD with dynamical width (Toshiki Maruyama et al.)
- Kiderlen and Danielewicz, Nucl. Phys. A620 (1997) 346.
- M. Colonna and Ph. Chomaz, Phys. Lett., B436 (1998) 1.

クラスタの出現は十分に起こらない。





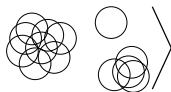
## AMD wave function

$$|\Phi(Z)\rangle = \det_{ij} \left[ \exp \left\{ -v \left( \mathbf{r}_j - \frac{\mathbf{Z}_i}{\sqrt{v}} \right)^2 \right\} \chi_{\alpha_i}(j) \right]$$

$$\mathbf{Z}_i = \sqrt{v} \mathbf{D}_i + \frac{i}{2\hbar\sqrt{v}} \mathbf{K}_i$$

$$v : \text{Width parameter} = (2.5 \text{ fm})^{-2}$$

$$\chi_{\alpha_i} : \text{Spin-isospin states} = p \uparrow, p \downarrow, n \uparrow, n \downarrow$$



## Stochastic equation of motion for the wave packet centroids $Z$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Z}_i = \{ \mathbf{Z}_i, \mathcal{H} \}_{\text{PB}} + (\text{NN collisions}) + \Delta \mathbf{Z}_i(t)$$

- Mean field (Time evolution of single-particle wave functions)
- Nucleon-nucleon collisions (as the residual interaction)
- Wave packet splitting (Mean field + Quantum branching)

# 非線形性とブランチング

多体系の波動関数で、特に一核子に注目．分解するのは勝手？

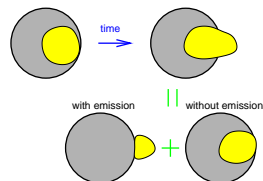
$$|\psi\rangle|\tilde{\Phi}\rangle = c_1 |\psi_1\rangle|\tilde{\Phi}\rangle + c_2 |\psi_2\rangle|\tilde{\Phi}\rangle$$

平均場近似での時間発展

$$|\psi\rangle|\tilde{\Phi}\rangle \xrightarrow{\text{平均場 } U} |\psi(t)\rangle|\tilde{\Phi}(t)\rangle$$

$$|\psi_1\rangle|\tilde{\Phi}\rangle \xrightarrow{\text{平均場 } U_1} |\psi_1(t)\rangle|\tilde{\Phi}_1(t)\rangle$$

$$|\psi_2\rangle|\tilde{\Phi}\rangle \xrightarrow{\text{平均場 } U_2} |\psi_2(t)\rangle|\tilde{\Phi}_2(t)\rangle$$



分解の仕方によって結果が異なる．(平均場近似による非線形性のため)

$$|\psi(t)\rangle|\tilde{\Phi}(t)\rangle \neq c_1 |\psi_1(t)\rangle|\tilde{\Phi}_1(t)\rangle + c_2 |\psi_2(t)\rangle|\tilde{\Phi}_2(t)\rangle$$

どちらを信じたらいいのでしょうか？ どちらがより重要か？

- 干渉
- チャンネルの独立性

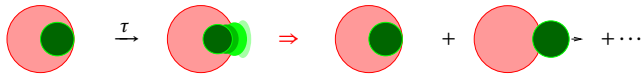
# 平均場 + ブランチング = AMD + 波束の分岐

At each time step  $t_0$ , for each wave packet  $k, \dots$

$t = t_0$

$t = t_0 + \tau$

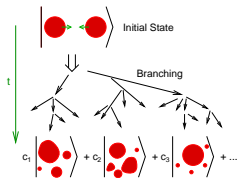
$$|\mathbf{Z}_k\rangle\langle\mathbf{Z}_k| \xrightarrow{\text{Mean field}} |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \xrightarrow{\text{Branching/Decoherence}} \int |\mathbf{z}\rangle\langle\mathbf{z}| w_k(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad \text{for } k = 1, \dots, A$$



$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_k(t)\rangle = \hat{h} |\psi_k(t)\rangle$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = -\frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{p}}$$

$$|\Phi(Z)\rangle\langle\Phi(Z)| \xrightarrow{\text{Branching/Decoherence}} |\Psi\rangle\langle\Psi| \xrightarrow{\text{Branching/Decoherence}} \int |\Phi(z)\rangle\langle\Phi(z)| w(z) dz$$

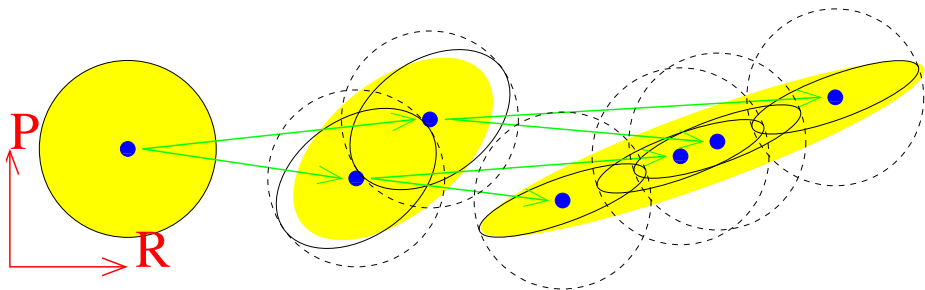


## Coherence time $\tau$

- $\tau \rightarrow 0$  (Strongest branching)
- $\tau = \tau(\rho)$  (Density-dependent)
- $\tau = \tau_{\text{NN-coll}}$  (Decoherence at NN collisions) :default

# 位相空間での波束のブランチング

自由粒子の例



黄色い領域：TDHF (Vlasov) の解

Branching = 破線のガウス波束に置き換える

## 波束中心に対する運動方程式

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathbf{Z}_i &= \{\mathbf{Z}_i, \mathcal{H}\}_{\text{PB}} && \text{Mean field} \\
 &+ \Delta \mathbf{Z}_i(t) && \text{Mean field \& Branching} \\
 &+ \mu(\mathbf{Z}_i, \mathcal{H}') && \text{Dissipation} \\
 &+ \text{NN-Collision}
 \end{aligned}$$

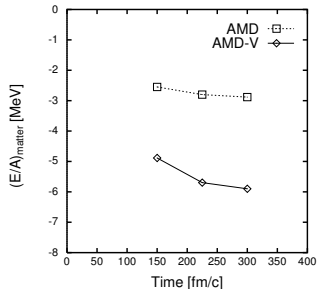
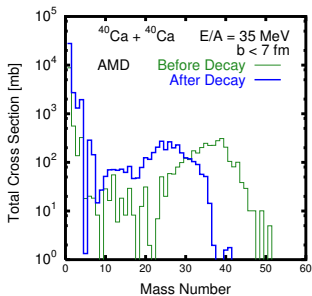
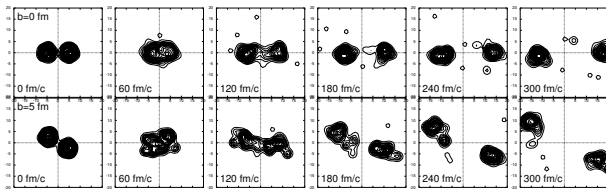
簡単のため、仮に  $\mathbf{Z}_i$  が正準座標であるとした場合の表式を書くと

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{Z}_i, \mathcal{H}\}_{\text{PB}} &= \frac{1}{i\hbar} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{Z}_i^*} \\
 \overline{\Delta Z_{ia}(t)} &= 0, \quad \overline{\Delta Z_{ia}(t) \Delta Z_{jb}(t')} = D_{iab}(t) \delta_{ij} \delta(t-t') \\
 (\mathbf{Z}_i, \mathcal{H}') &= \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \mathbf{Z}_i^*}, \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \sum_m \beta_m \mathcal{Q}_m
 \end{aligned}$$

- $\mu$  は全エネルギー保存の条件によって決まる。
- ラグランジュ定数  $\beta_m$  は、集団的な量  $\mathcal{Q}_m$  が減衰項  $(\mathbf{Z}_i, \mathcal{H}')$  によって変化しないように決める。

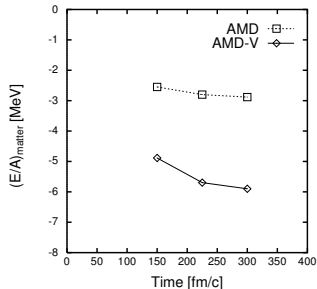
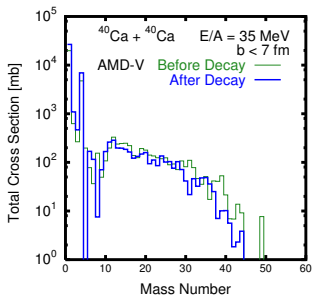
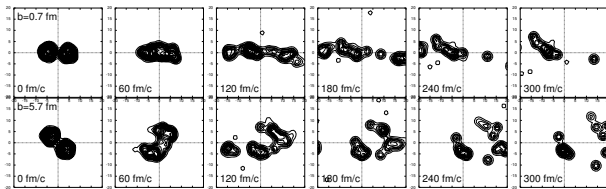
$$\{\mathcal{Q}_m\} = \left\{ \left\langle \sum_i \mathbf{r}_i \right\rangle, \left\langle \sum_i \mathbf{p}_i \right\rangle, \left\langle \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \right\rangle, \left\langle \sum_i r_{i\sigma} r_{i\tau} \right\rangle, \left\langle \sum_i p_{i\sigma} p_{i\tau} \right\rangle \right\} \quad \sigma, \tau = x, y, z$$

# AMD without Wave Packet Splitting ( $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ at 35 MeV/u)



Ono & Horiuchi, PRC 53 (1996) 2958.

# AMD with Wave Packet Splitting ( $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ at 35 MeV/u)

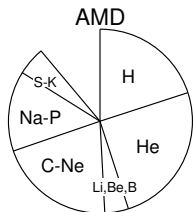
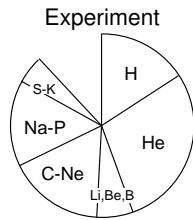
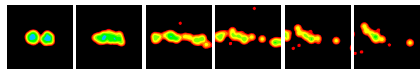


Ono & Horiuchi, PRC 53 (1996) 2958.



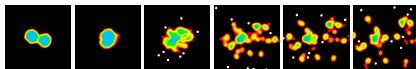
# Multifragmentation described by AMD with Wave Packet Splitting

$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$  at 35 MeV/u,  $b = 0$

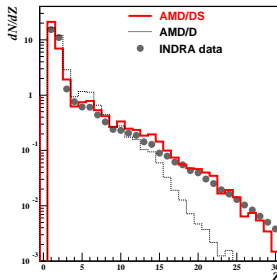


(Gogny force)  
Soft EOS,  $p$ -dep U  
AMD with  $\tau \rightarrow 0$ .

Xe + Sn at 50 MeV/u,  $0 \leq b \leq 4$  fm



Charge distribution

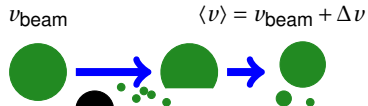
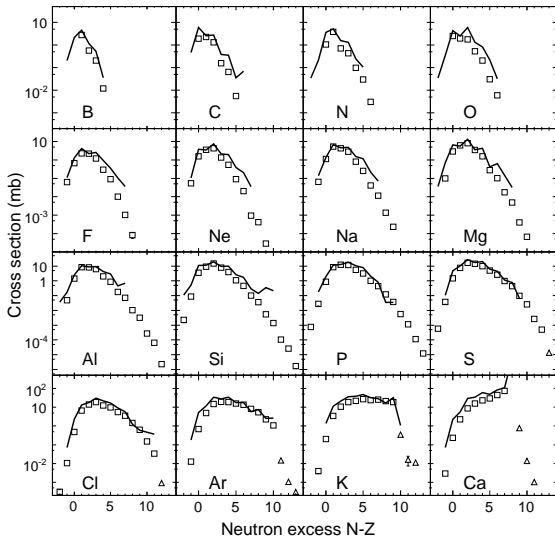


AMD/D ( $\tau = 0$ ) & AMD/DS (finite  $\tau$ )  
AO, Hudan et al., PRC 66 (2002) 014603.

# Rare isotope production by projectile fragmentation

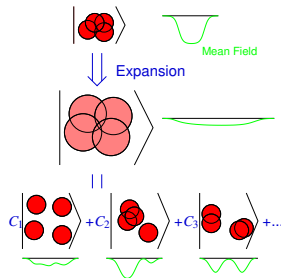
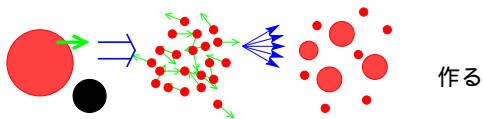
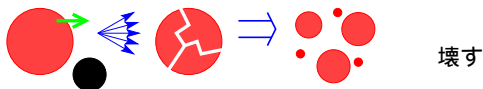
Mocko, Tsang, AO et al., PRC78(2008)024612.

$^{48}\text{Ca} + ^9\text{Be}$  at 140 MeV/nucleon



# フラグメント生成の記述に必要な要素

原子核を壊すのは簡単だが、フラグメントを作るのは単純でない。



- 平均場中での制約のない一粒子運動（例えば系全体の膨張の記述）
- 局在化した波束（クラスターやフラグメントができるように）
- 時間の経過にしたがって多数のチャンネルが出現

1. 重イオン衝突の概観
2. 平均場理論
3. 分子動力学
4. 一粒子的量子分岐による拡張
  - 波束の分岐
  - 確率的平均場理論との比較
5. 熱平衡の観点から
6. クラスタ相関
7. 状態方程式と重イオン衝突

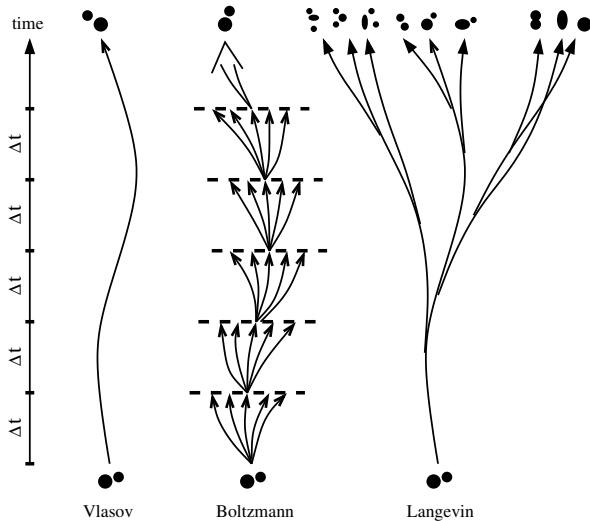
VUU 方程式 (BUU 方程式, BNV 方程式などとも呼ばれる):

一体分布関数  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  (一体密度行列の Wigner 変換) に対する運動方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + I_{\text{coll}}$$

衝突項

$$I_{\text{coll}} = \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\Omega |\nu| \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\nu \left\{ f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_4, t) [1 - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)] [1 - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t)] \right. \\ \left. - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) [1 - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t)] [1 - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_4, t)] \right\}$$



# Fluctuation in Mean Field Models

Different trajectories  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  for different events. (Boltzmann-Langevin Eq.)

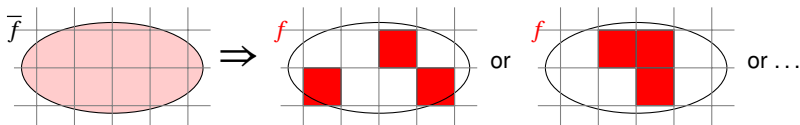
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial h}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + I_{\text{coll}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \delta I(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$$

$$\overline{\delta I(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)} = 0, \quad \overline{\delta I(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \delta I(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t')} = \dots$$

⇒ Variance of  $f$  in each phase-space cell of  $(2\pi\hbar)^d$

[Stochastic Mean Field: Colonna et al., NPA 642 (1998) 449.]

$$\sigma_f^2 = \overline{(f - \bar{f})^2} = \bar{f}(1 - \bar{f}) = (1 - \bar{f})^2 \times \bar{f} + (0 - \bar{f})^2 \times (1 - \bar{f})$$



an occupied cell  $\approx$  a wave packet in AMD ( $\Delta x \Delta p = \frac{1}{2} \hbar$ )

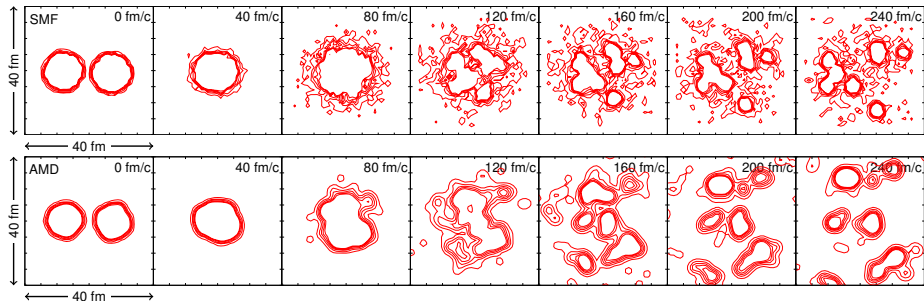
In actual calculations of SMF, only the density variance is considered,

$$\sigma_p^2 = \sum_{\text{p-cell}} \sigma_f^2$$

# AMD と SMF の比較 — 密度の時間発展

Colonna, Ono, Rizzo, PRC82 (2010) 054613.

- SMF = Stochastic Mean Field model
- AMD = Antisymmetrized Molecular Dynamics

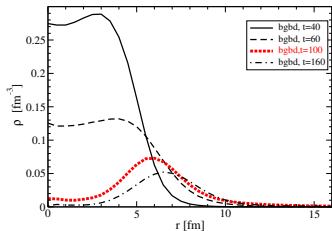


Central Collisions of  $^{112}\text{Sn} + ^{112}\text{Sn}$  at 50 MeV/nucleon

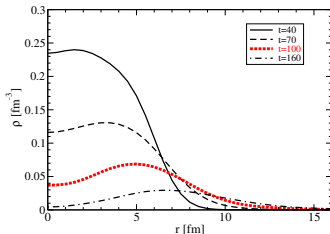


# AMD と SMF の比較 — 集団的膨張

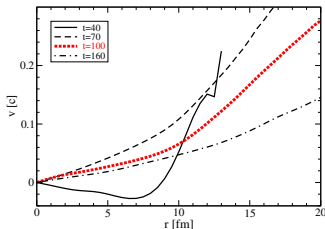
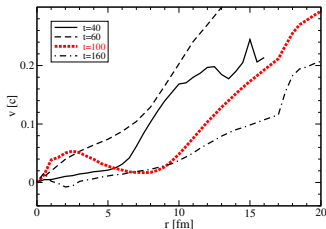
## SMF



## AMD



Density  
distribution  
 $\langle \rho \rangle(r)$



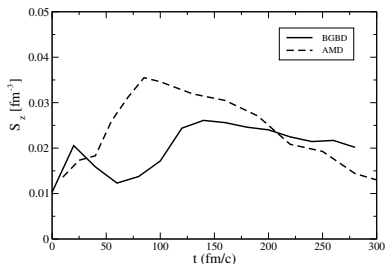
Collective  
momentum  
 $\left\langle \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{p} \right\rangle(r)$

$r$  = distance from the center of the system

# AMD と SMF の比較 — 密度のゆらぎ

Density fluctuation  $\sim \langle (\rho(\mathbf{r}, t) - \langle \rho \rangle(\mathbf{r}, t))^2 \rangle$  (on the  $z$ -axis)

- $\rho(\mathbf{r}, t)$ : Density in each event
- $\langle \rho \rangle(\mathbf{r}, t)$ : Density averaged over events



## Different mechanisms of fragmentation

- SMF: Spinodal decomposition
- AMD: Earlier prefragments



## Different collective expansions

- Slow or rapid expansion
- Bubble-like or broader density distribution

## 一粒子運動

- 一般的に言って、一粒子状態の時間発展に制約があるより制約がない方がよいだろう。
- 純粋な平均場理論では一粒子の波動関数  $\psi$  がコヒーレント

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \quad \text{純粋状態}$$

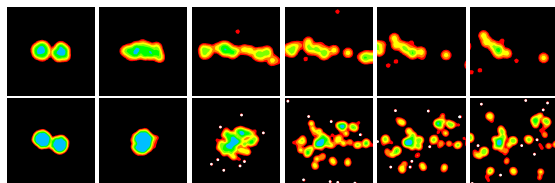
## ゆらぎ (分子力学的)

- 多チャンネルが出現する状況では、一粒子状態が広がりすぎてはまずいだろう。
- 一粒子状態は積極的に波束の混合状態とする。

$$\hat{\rho} = \sum_n w_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

- 分子動力学から出発して、波束の拡散・変形を波束の分岐として取り入れる。
- 平均場理論から出発して、核子が位相空間で局在化するようなゆらぎを導入する。

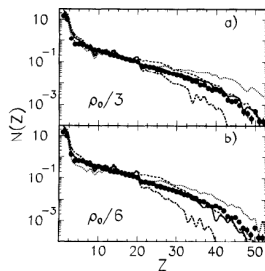
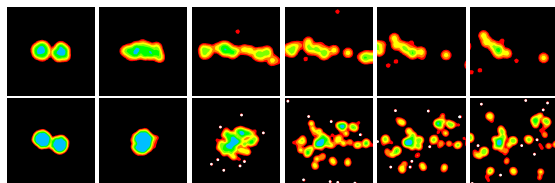
1. 重イオン衝突の概観
2. 平均場理論
3. 分子動力学
4. 一粒子的量子分岐による拡張
5. 熱平衡の観点から
  - 統計模型
  - AMD による統計計算
  - 液相気相相転移
  - アイソスピン自由度
6. クラスタ相関
7. 状態方程式と重イオン衝突



統計力学（熱平衡の概念）を適用することに意味があるか？

- 経験的には、統計モデルによる計算は実験データをかなり説明できる。
- 統計力学が適用できれば、相転移や状態方程式との関係が直接的となり、好都合。
- “熱平衡” が成立しているとは考えにくい？

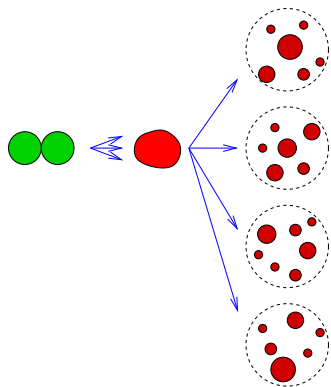
“熱平衡”: 全体的な様相がほとんど変化しない間 ( $\Delta t \sim 10 \text{ fm}/c$ ) に十分複雑なことが起こり、様々な自由度の間でエネルギーのやりとりが起こる。(流体力学的)



統計力学（熱平衡の概念）を適用することに意味があるか？

- 経験的には、統計モデルによる計算は実験データをかなり説明できる。
- 統計力学が適用できれば、相転移や状態方程式との関係が直接的となり、好都合。
- “熱平衡” が成立しているとは考えにくい？

“熱平衡”: 全体的な様相がほとんど変化しない間 ( $\Delta t \sim 10 \text{ fm}/c$ ) に十分複雑なことが起こり、様々な自由度の間でエネルギーのやりとりが起こる。(流体力学的)



ある時刻（例えば  $t = 100 \text{ fm}/c$ ）であらゆる微視的状態が等確率で実現する．

- その時点での熱平衡というよりも、そこに至る反応の複雑さのため．
- 体積，集团的膨張などの拘束条件は必要．
- “Pre-equilibrium” を除く必要はある．
- 全く等確率というわけではないだろうが，注目する物理量による．

## ゼロ温度の状態方程式

$$E/A = \epsilon(\rho) \quad \text{または} \quad E/A = \epsilon_0(\rho) + C_{\text{sym}}(\rho) \left( \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho} \right)^2$$

## 古典系の状態方程式

$$PV = NRT \quad (\text{ideal gas})$$

$$\left( P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT, \quad v = V/N \quad (\text{Van der Waals})$$

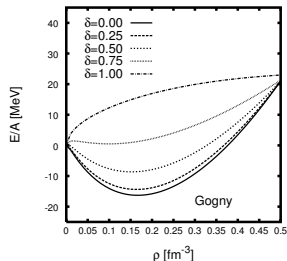
## 有限温度

$$P = f(T, V) \quad \text{or} \quad g(P, V) = T$$

$$\left( dE = -PdV + TdS \right)$$

$$P = - \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T$$

## 平均場近似での状態方程式



$$\delta = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho}$$



## ゼロ温度の状態方程式

$$E/A = \epsilon(\rho) \quad \text{または} \quad E/A = \epsilon_0(\rho) + C_{\text{sym}}(\rho) \left( \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho} \right)^2$$

## 古典系の状態方程式

$$PV = NRT \quad (\text{ideal gas})$$

$$\left( P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT, \quad v = V/N \quad (\text{Van der Waals})$$

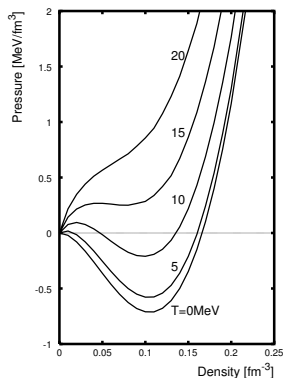
## 有限温度

$$P = f(T, V) \quad \text{or} \quad g(P, V) = T$$

$$\left( dE = -PdV + TdS \right)$$

$$P = - \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T$$

## 平均場近似での状態方程式



$$\rho_n = \rho_p \quad (\text{対称核物質})$$

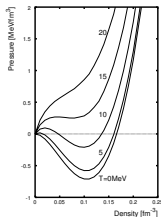
ボルツマンの式

$$S(E, V) = k_B \log W(E, V)$$

つまり，熱力学的性質を決めるのは状態密度

$$W(E, V) = \sum_i \delta(E - \epsilon_i(V)),$$

$$\hat{H}(V)|\varphi_i(V)\rangle = \epsilon_i(V)|\varphi_i(V)\rangle$$

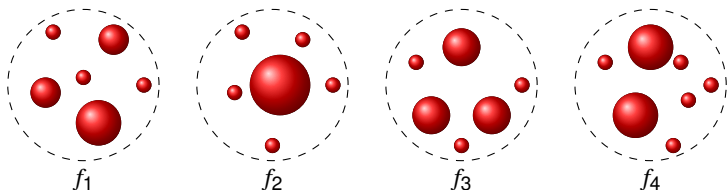


平均場近似の状態方程式は， $\hat{H}$  の固有関数が平面波のスレーター行列式で与えられると近似している．

現実には，そこまで単純ではない．特に低密度では．

# 統計模型による多重破碎の記述 (SMM)

( $A_{\text{tot}}, N_{\text{tot}}, V, E$ ) で指定された状態のアンサンブル



各配位  $f$  は分割の仕方  $\{N_{AZ}\}$  で指定する .  $N_{AZ}$ : 原子核  $AZ$  の個数 .

配位  $f$  の重み:

$$W_f(E) = e^{S_f(E)} = (\text{配位 } f \text{ をもつ微視的状态の数})$$

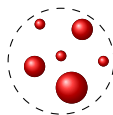
カノニカルアンサンブル

$$e^{-F_f(T)/T} = \int e^{-E/T} W_f(E) dE = \int e^{-(E-TS_f(E))/T} dE$$

各配位  $f = \{N_{AZ}\}$  の自由エネルギー (SMM モデル)

$$e^{-F_f/T} = \prod_{AZ} \frac{1}{N_{AZ}!} \left[ V_f \left( \frac{mAT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^{N_{AZ}} \left( e^{-F_{AZ}/T} \right)^{N_{AZ}}$$

(+ Effect of Coulomb interaction)



各原子核  $AZ$  の内部自由エネルギー

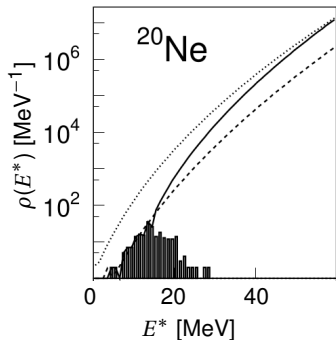
$$e^{-F_{AZ}/T} = \int e^{-E/T} \rho_{AZ}(E) dE$$

原子核の状態密度  $\rho_{AZ}(E)$  が重要なインプット.

- $T=0$  では  $F_{AZ} = -B.E.(A, Z)$  は既知とする.
- 低励起エネルギーでは実験データがある.
- 高励起エネルギーではフェルミガスの表式を使う.

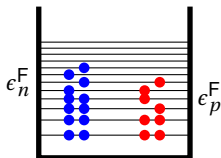
$$\rho_{FG}(E) \propto \frac{e^{2\sqrt{a(E-E_0)}}}{(E-E_0)^{3/4}}, \quad a(A) = \frac{A}{\epsilon_0} + \frac{5}{2}\sigma_0 \frac{A^{2/3}}{T_c^2}$$

Tan et al., PRC68 (2003) 034609.



# フェルミ気体の関係式

原子核  $\approx$  体積  $V (= \frac{4}{3}\pi r_0^2 A)$  のフェルミ気体



一粒子準位密度と占有確率，フェルミエネルギー

$$g_n(\epsilon), g_p(\epsilon) = 2 \times 2\pi \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} V \sqrt{\epsilon}, \quad f_n(\epsilon, T), f_p(\epsilon, T) = \frac{1}{1 + e^{(\epsilon - \mu_{n,p})/T}}$$

$$\mu_{n,p} = \epsilon_{n,p}^F + O(T), \quad \epsilon_{n,p}^F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 \rho_{n,p})^{2/3} \approx 37 \text{ MeV}$$

温度  $T$  におけるエネルギー ( $\rho = \rho_n + \rho_p, \delta = (\rho_n - \rho_p)/\rho$ )

$$E(T) = E(T=0) + aT^2 + O(T^3), \quad E(T=0) = \frac{3}{5} \bar{\epsilon}_F A (1 + \frac{5}{9} \delta^2 + O(\delta^4))$$

$$\text{Level density parameter: } a = \frac{1}{6} \pi^2 g(\bar{\epsilon}_F) (1 - \frac{1}{9} \delta^2 + O(\delta^4)) \approx A/(16 \text{ MeV})$$

熱力学の関係式  $dE = -PdV + TdS$  を使うと  $S(T) = 2aT + O(T^2)$  . 自由エネルギーは

$$F(T) = E(T) - TS(T) = \frac{3}{5} \bar{\epsilon}_F A - aT^2 + C_{\text{sym}}(T) A \delta^2$$

$$C_{\text{sym}}(T) = \frac{1}{3} \bar{\epsilon}_F + \frac{1}{9} aT^2/A \approx 12 \text{ MeV} + \frac{1}{9} E^*(T)/A$$

- 基底状態のエネルギー  $E(T=0)/A = \frac{3}{5} \epsilon_F \Rightarrow -16 \text{ MeV} + \text{表面項}$

核力（引力）の効果

- 対称エネルギー  $C_{\text{sym}} = 12 \text{ MeV} \Rightarrow 30 \text{ MeV}$

核力の性質・反対称化の効果

- Level density parameter

$$E^*/A = aT^2, \quad \rho(E) \approx e^{\sqrt{2aE^*}}$$

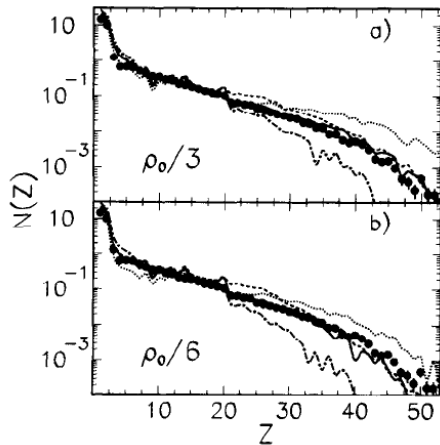
$$a/A = \frac{1}{16 \text{ MeV}} \Rightarrow \frac{1}{8 \text{ MeV}} \text{ (低温)} \sim \frac{1}{12 \text{ MeV}} \text{ (高温)}$$

多体効果（表面効果も含まれる）

# SMM の計算結果の例

$F_{AZ}, (T \text{ or } E, V, A_{\text{tot}}, Z_{\text{tot}}) \Rightarrow$  配位  $f$  の重み  $e^{-F_f/T} \Rightarrow$  物理量

Central Au + Au at 35 MeV/u



$$\rho_s = \rho_0/3$$

$$(A_s, Z_s) = (343, 138)$$

$$E_s^*/A = 6.0 \text{ MeV}$$

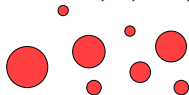
$$\rho_s = \rho_0/6$$

$$(A_s, Z_s) = (315, 126)$$

$$E_s^*/A = 4.8 \text{ MeV}$$

D'Agostino et al., Phys. Lett. B 371 (1996)

与えられた  $T, V, N^{\text{tot}}, Z^{\text{tot}}$



原子核 ( $A, Z$ ) の存在量

$$Y_{AZ} = \frac{\sum_f N_{AZ}(f) e^{-F_f/T}}{\sum_f e^{-F_f/T}} \propto (AT)^{3/2} \exp\left[-\frac{1}{T}(F_{AZ} - \mu_n N - \mu_p Z)\right]$$

陽子中性子比の異なる二つの系 ( $N_i^{\text{tot}}, Z_i^{\text{tot}}$ ) ( $i = 1, 2$ ) を考えると

$$Y_{AZ}^{(1)} \propto (AT)^{3/2} \exp\left[-\frac{1}{T}(F_{AZ} - \mu_n^{(1)} N - \mu_p^{(1)} Z)\right]$$

$$Y_{AZ}^{(2)} \propto (AT)^{3/2} \exp\left[-\frac{1}{T}(F_{AZ} - \mu_n^{(2)} N - \mu_p^{(2)} Z)\right]$$

Isoscaling

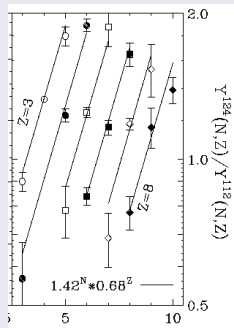
$$\frac{Y_{AZ}^{(2)}}{Y_{AZ}^{(1)}} = e^{\alpha N + \beta Z} \quad \alpha = \frac{\mu_n^{(2)} - \mu_n^{(1)}}{T}, \quad \beta = \frac{\mu_p^{(2)} - \mu_p^{(1)}}{T}$$



## 実験データ

- $^{112}\text{Sn} + ^{112}\text{Sn}$
- $^{124}\text{Sn} + ^{124}\text{Sn}$

Central,  $E/A = 50$  MeV

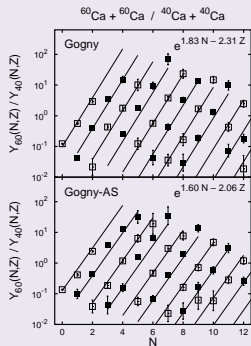


Tsang et al., PRL 85 (2000) 716.

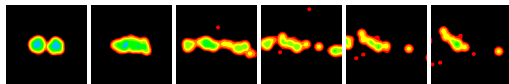
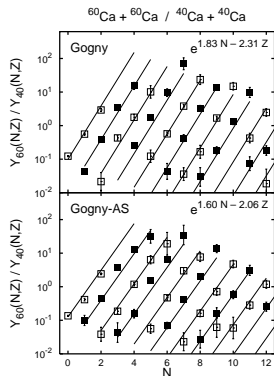
## AMD 計算

- $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$
- $^{60}\text{Ca} + ^{60}\text{Ca}$

$b = 0$ ,  $E/A = 35$  MeV



# 動的反応におけるアイソスケーリング



Ca + Ca at 35 MeV/nucleon,  $b = 0$

- かなり動的な反応のようにも見える．
- にもかかわらず，フラグメント生成量  $Y_{AZ}$  (の少なくともある側面) は熱平衡と矛盾していない．

AO et al., PRC68(2003)051601(R),  
 PRC70(2004)041604(R)

1. 重イオン衝突の概観
2. 平均場理論
3. 分子動力学
4. 一粒子的量子分岐による拡張
5. 熱平衡の観点から
  - 統計模型
  - **AMD による統計計算**
  - 液相気相相転移
  - アイソスピン自由度
6. クラスタ相関
7. 状態方程式と重イオン衝突

AMD は熱平衡を記述できるか？

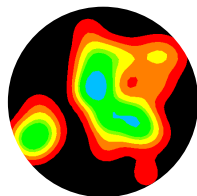
- 時間発展を計算できるのであれば、原理的には何でも計算できるはず。
- しかし、仮に  $10 \text{ fm}/c$  や  $100 \text{ fm}/c$  の時間の計算が信頼できるとしても、 $10000 \text{ fm}/c$  の時間の計算が信頼できるとは言えない。
- 熱平衡に重要な要素が時間発展方程式の中に適切に組み込まれているかという問題。

## 熱平衡の構築

与えられた体積  $V$  の箱の中に  $A$  個の核子を入れ、エネルギー  $E$  を与えた初期条件から長時間の時間発展を解く。



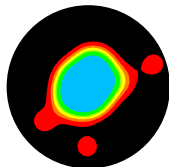
ミクロカノニカルアンサンブル



$$A = 36, V = \frac{4}{3}\pi(9 \text{ fm})^3, \\ E^* = 10A \text{ MeV}$$

# 熱平衡 (カロリ-曲線)

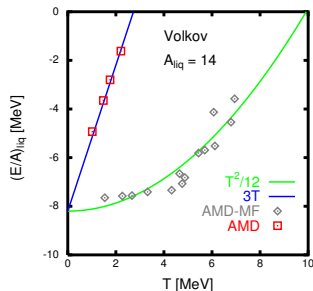
運動方程式  $dZ/dt = \{Z, \mathcal{H}\}_{PB}$  はいかにも古典力学的であるが, 原子核の量子力学的な統計的性質 (例えば  $E^* = aT^2$ ) と矛盾していないのか!



⇒ 温度など

## 結論

- $Z$  が古典方程式に従うとしても,  $|\Phi(Z)\rangle$  の統計が量子力学的になっても不思議はない.
- しかし, 一般的には, 時間発展の修正は必要.

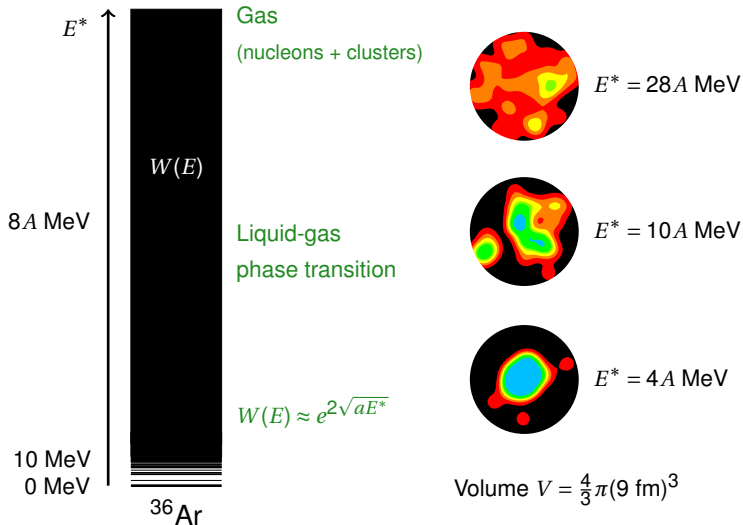


Ono and Horiuchi, PRC53 (1996) 845; PRC53 (1996) 2341.

Related works by:

- Ohnishi & Randrup
- Schnack & Feldmeier
- Sugawa & Horiuchi
- Furuta & Ono
- Hasnaoui et al.

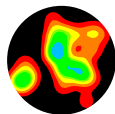
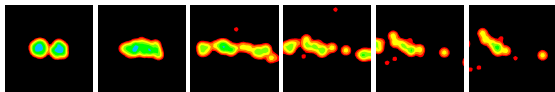
# 箱の中の励起した多核子系



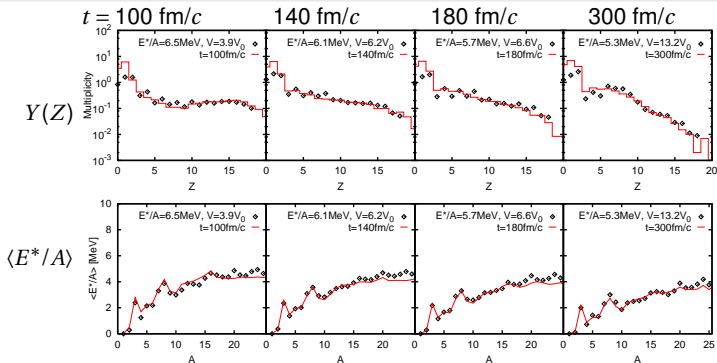
# 反応と熱平衡の比較 — フラグメント

$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $E/A = 35 \text{ MeV}$ ,  $b = 0$

Furuta and Ono, PRC79 (2009) 014608.



{時刻  $t$  での状態}  $\stackrel{?}{=} \stackrel{?}{=} \stackrel{?}{=} \text{熱平衡アンサンブル } (E, V, A = 36)$   
half of Ca + Ca system

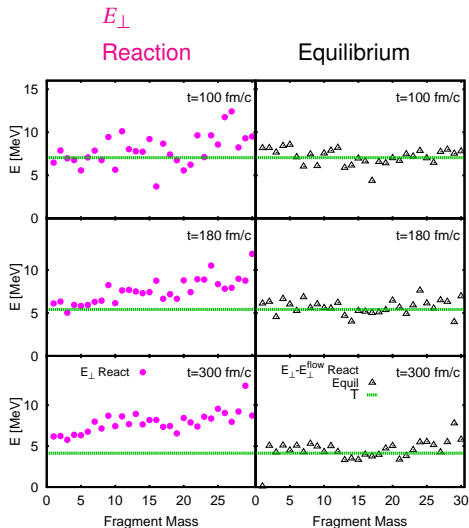


# 反応と熱平衡の比較 — 運動エネルギーとフロー

フラグメントの重心運動の横方向運動エネルギー：

$$E_{\perp}(A) = \frac{1}{2\mu(A)} \langle \mathbf{P}_{\perp}^2 \rangle_A$$

- 反応と熱平衡は一致しない．特に遅い時刻．





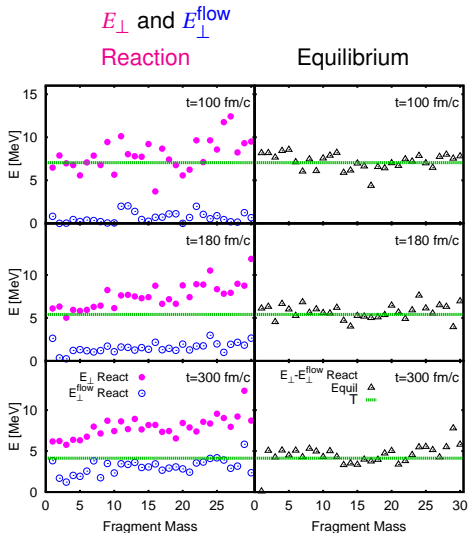
# 反応と熱平衡の比較 — 運動エネルギーとフロー

フラグメントの重心運動の横方向運動エネルギー：

$$E_{\perp}(A) = \frac{1}{2\mu(A)} \langle \mathbf{P}_{\perp}^2 \rangle_A$$

- 反応と熱平衡は一致しない．特に遅い時刻．
- 反応ではフローがある．

$$E_{\perp}^{\text{flow}}(A) = \frac{1}{2\mu(A)} \left\langle \mathbf{P}_{\perp} \cdot \frac{\mathbf{R}_{\perp}}{|\mathbf{R}_{\perp}|} \right\rangle_A^2$$



# 反応と熱平衡の比較 — 運動エネルギーとフロー

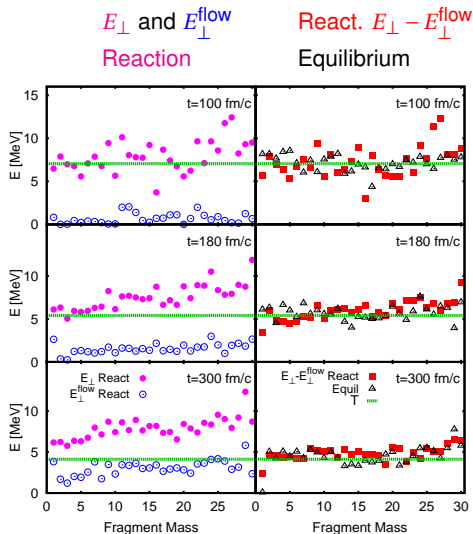
フラグメントの重心運動の横方向運動エネルギー：

$$E_{\perp}(A) = \frac{1}{2\mu(A)} \langle \mathbf{P}_{\perp}^2 \rangle_A$$

- 反応と熱平衡は一致しない．特に遅い時刻．
- 反応ではフローがある．

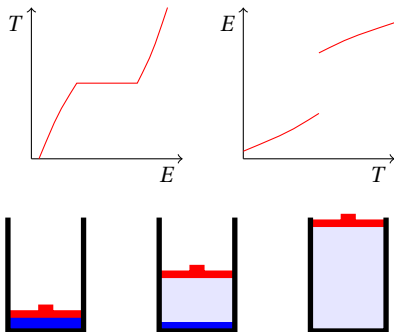
$$E_{\perp}^{\text{flow}}(A) = \frac{1}{2\mu(A)} \left\langle \mathbf{P}_{\perp} \cdot \frac{\mathbf{R}_{\perp}}{|\mathbf{R}_{\perp}|} \right\rangle_A^2$$

- フローを引き去ると，反応と熱平衡は一致する．
- しかも，フラグメントの励起エネルギーを再現する温度とも一致．

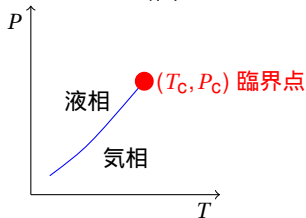
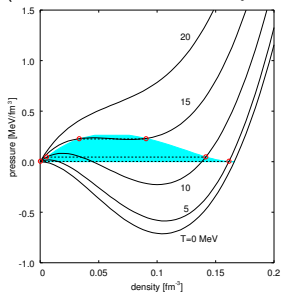


1. 重イオン衝突の概観
2. 平均場理論
3. 分子動力学
4. 一粒子的量子分岐による拡張
5. 熱平衡の観点から
  - 統計模型
  - AMD による統計計算
  - 液相気相相転移
  - アイソスピン自由度
6. クラスタ相関
7. 状態方程式と重イオン衝突

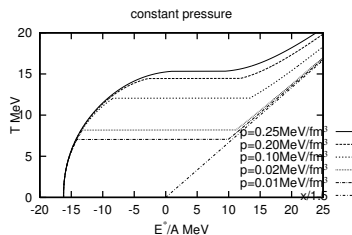
定圧下 (例えば 1 気圧)



平均場近似の状態方程式  
(Van der Waals に類似)



カロリー曲線



- 液相 (原子核)
- 液相と気相の共存
- 気相 (ばらばらの核子?)

「相転移は無限に大きい系のみで起こる」といわれることが多い。  
有限系ではどうなる？

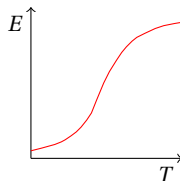
# 有限系のカノニカルアンサンブル

有限の系（熱力学的極限でない系）ではどうなる？

カノニカルアンサンブルでは

$$E(T, P) = \frac{\int E e^{S(E, V, N) - E/T - PV/T} dE dV}{\int e^{S(E, V, N) - E/T - PV/T} dE dV} = T, P \text{ の滑らかな関数}$$

相転移の特異性はカノニカルでは見えない。



だからといって、「有限系では相転移はない（見えない）」などと言っていいのか？

# 熱力学的極限

温度  $T$  , 圧力  $P$  , 粒子数  $N$  のアンサンブルにおいて , エネルギーが  $E$  で体積が  $V$  である確率

$$W_{TPN}(E, V) = \rho(E, V, N) e^{-E/T - PV/T} = e^{S(E, V, N) - E/T - PV/T}$$

一粒子あたりの量  $E = N\epsilon$  ,  $V = N\nu$  ,  $S(E, V, N) = N s_N(\epsilon, \nu)$  を用いて書き表すと

$$w_{TPN}(\epsilon, \nu) = e^{N[s_N(\epsilon, \nu) - \epsilon/T - P\nu/T]} \xrightarrow{\text{熱力学的極限}} \delta(\epsilon - \epsilon_0(T, P)) \delta(\nu - \nu_0(T, P))$$



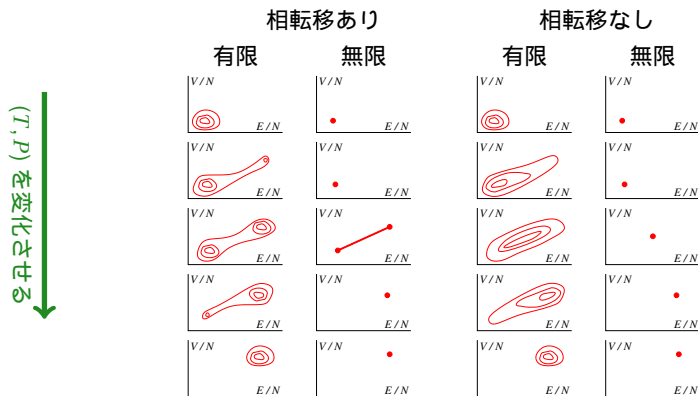
熱力学的極限 :  $(\epsilon, \nu)$  を一定として  $N \rightarrow \infty$

$(\epsilon_0, \nu_0)$  :  $s_N(\epsilon, \nu) - \epsilon/T - P\nu/T$  が最大となる点 ( $N \rightarrow \infty$ )

熱力学的極限では , 普通は  $(T, P)$  と  $(\epsilon, \nu)$  が一対一対応となる .

# 相転移とエントロピーの構造

エントロピー  $s_N(\epsilon, \nu)$  すなわち  $e^{N[s_N(\epsilon, \nu) - \epsilon/T - P\nu/T]}$  の構造に注目.



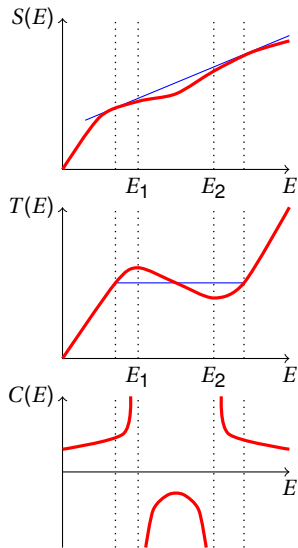
$s_N(\epsilon, \nu)$  は有限の  $N$  では解析的であり, 熱力学極限においてのみ非解析的になり得る.

一次相転移  $\Leftrightarrow w_{TPN}(\epsilon, \nu)$  が複数ピーク  $\Leftrightarrow s_N(\epsilon, \nu)$  に「凹部」があるかどうか



# カロリー曲線のバックベンディング

相転移がある場合



エントロピーがくぼんでいる領域がある。

$$\frac{\partial^2 S(E)}{\partial E^2} > 0 \quad \text{for } E_1 < E < E_2$$

ミクロカノニカルのカロリー曲線が backbend する。

$$\frac{1}{T(E)} = \frac{\partial S(E)}{\partial E}$$

ミクロカノニカルの比熱が負になる領域がある。

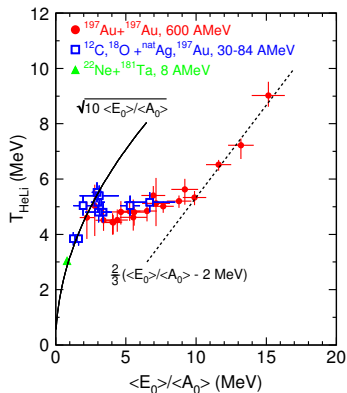
$$C(E) = \left( \frac{\partial T(E)}{\partial E} \right)^{-1} < 0 \quad \text{for } E_1 < E < E_2$$

ミクロカノニカルアンサンブルを調べれば、有限系でも相転移が顕著に現れる。

D.H.E. Gross

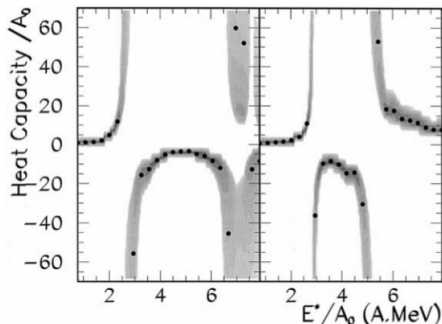
# 液相気相相転移の実験データ

## カロリーー曲線



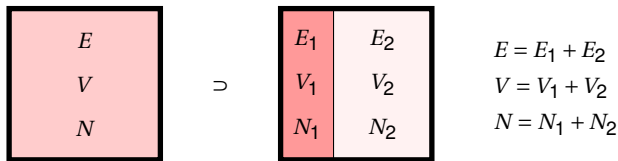
Pochodzalla et al., PRL 75 (1995) 1040.

## 比熱



M. D'Agostino et al., PLB 473 (2000) 219.

# 普通比熱が負にならない理由



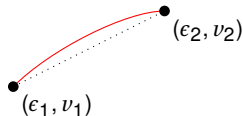
$$\rho(E, V, N) \geq \rho(E_1, V_1, N_1) \cdot \rho(E_2, V_2, N_2)$$

$$S(E, V, N) \geq S(E_1, V_1, N_1) + S(E_2, V_2, N_2)$$

$$s(\epsilon, v) \geq x s(\epsilon_1, v_1) + (1-x) s(\epsilon_2, v_2) \quad x = N_1/N, \quad 1-x = N_2/N$$

$$\epsilon = x\epsilon_1 + (1-x)\epsilon_2$$

$$v = xv_1 + (1-x)v_2$$



⇒ エントロピー  $s(\epsilon, v)$  は必ず上に凸 .

ただし、この証明は系の「**Extensivity**」を仮定している .

⇒ 有限系の液相気相相転移には当てはまらない .

## 熱平衡シミュレーション

与えられた  $(V, E)$  に対して長時間の  
時間発展を解く

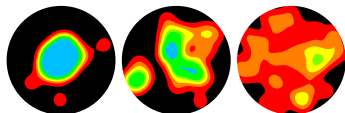
⇒ ミクロカノニカルアンサンブル

⇒  $(T, P)$

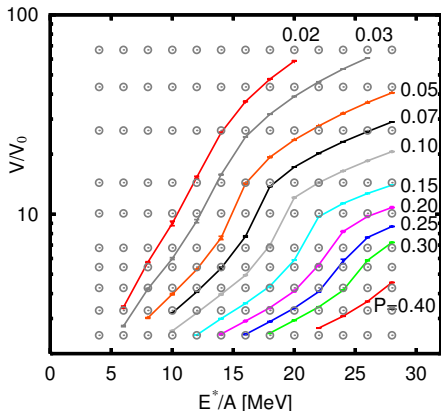
$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(E)}{\partial E} = \left\langle \frac{\partial S_{\text{gas}}(E_{\text{gas}})}{\partial E_{\text{gas}}} \right\rangle_E$$

$$= \left\langle \frac{\frac{3}{2} N_{\text{gas}} - 1}{E_{\text{gas}}} \right\rangle_E \approx \frac{3}{2} \left\langle \frac{E_{\text{gas}}}{N_{\text{gas}}} \right\rangle_E^{-1}$$

Furuta and Ono,  
PRC79 (2009) 014608;  
PRC74 (2006) 014612.



$(E, V)$  平面と等圧線



## 熱平衡シミュレーション

与えられた  $(V, E)$  に対して長時間の  
時間発展を解く

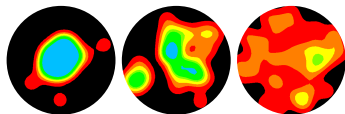
⇒ ミクロカノニカルアンサンブル

⇒  $(T, P)$

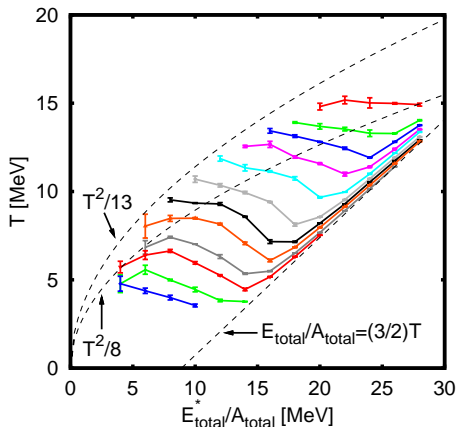
$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(E)}{\partial E} = \left\langle \frac{\partial S_{\text{gas}}(E_{\text{gas}})}{\partial E_{\text{gas}}} \right\rangle_E$$

$$= \left\langle \frac{\frac{3}{2} N_{\text{gas}} - 1}{E_{\text{gas}}} \right\rangle_E \approx \frac{3}{2} \left\langle \frac{E_{\text{gas}}}{N_{\text{gas}}} \right\rangle_E^{-1}$$

Furuta and Ono,  
PRC79 (2009) 014608;  
PRC74 (2006) 014612.

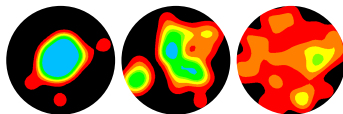
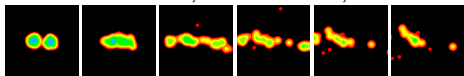


AMD で計算した定圧のカロリ-曲線

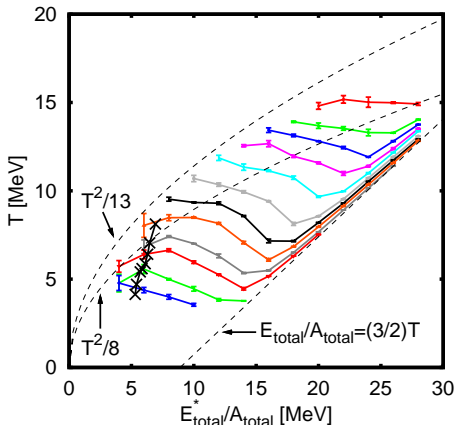
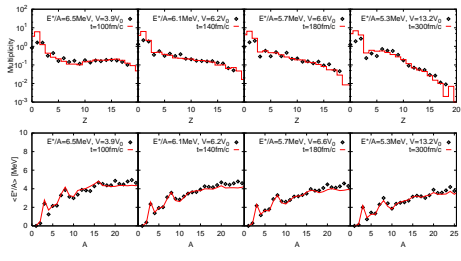


# カロリ-曲線上の反応の経路

$^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $E/A = 35 \text{ MeV}$ ,  $b = 0$



反応の経路



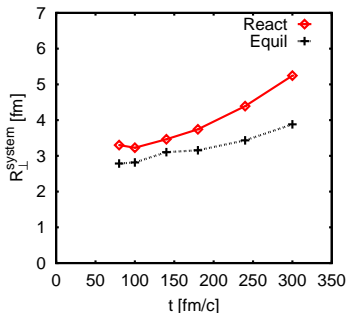
## 反応系と熱平衡系の体積

存在している  $A > 5$  のフラグメントの重心座標の横方向成分  $R_{\perp}$  から、系の体積に相当するものを定義する。

$$R_{\perp}^{\text{system}} = \sqrt{\langle R_{\perp}^2 \rangle_{A>5}} \sim \mathcal{V}^{1/3},$$

### 実際の体積

Reaction system  $\mathcal{V}(t) \gg$  Equilibrium system



つまり、各時刻で静的な熱平衡にあるという通常の状態とは異なる。

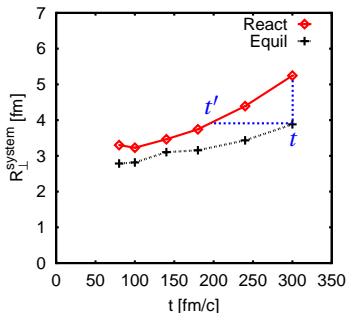
# 反応系と熱平衡系の体積

存在している  $A > 5$  のフラグメントの重心座標の横方向成分  $R_{\perp}$  から、系の体積に相当するものを定義する。

$$R_{\perp}^{\text{system}} = \sqrt{\langle R_{\perp}^2 \rangle_{A>5}} \sim \mathcal{V}^{1/3},$$

## 実際の体積

Reaction system  $\mathcal{V}(t) \gg$  Equilibrium system



つまり、各時刻で静的な熱平衡にあるという通常の状態とは異なる。

$$\boxed{\text{Reaction } (t)} \approx_{\text{frag.}} \boxed{\text{Equilibrium } (E, \mathcal{V}(t'))} \quad \text{where } t' < t$$

c.f. A.H. Raduta et al., PRC74 (2006) 034604.

This may be because fragments are formed in a dynamically expanding system and the observables of fragments recognized at a reaction time  $t$  may be reflecting the history of the state of the system before  $t$  rather than the volume at that instant  $t$ .



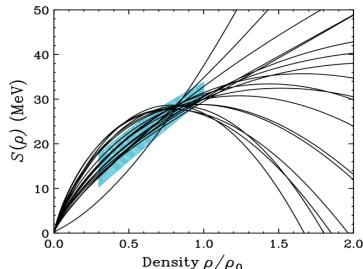
1. 重イオン衝突の概観
2. 平均場理論
3. 分子動力学
4. 一粒子的量子分岐による拡張
5. 熱平衡の観点から
  - 統計模型
  - AMD による統計計算
  - 液相気相相転移
  - **アイソスピン自由度**
6. クラスタ相関
7. 状態方程式と重イオン衝突

# 非対称核物質の EOS ( 対称エネルギー )

Nuclear EOS (at  $T = 0$ )

$$(E/A)(\rho_p, \rho_n) = (E/A)_0(\rho) + E_{\text{Sym}}(\rho)\delta^2$$

$$\rho = \rho_p + \rho_n, \quad \delta = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho_n + \rho_p}$$

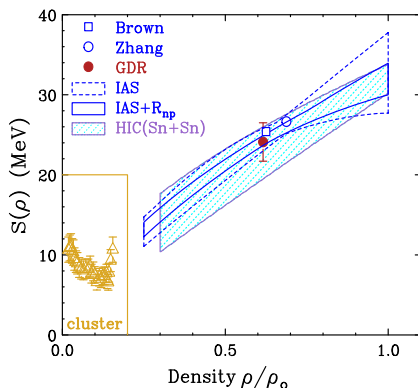


$E_{\text{Sym}}(\rho)$  for Skyrme interactions

- $S_0 = E_{\text{Sym}}(\rho_0)$  at the saturation density
- $L = 3\rho_0(dE_{\text{Sym}}/d\rho)_{\rho=\rho_0}$

Constraints on symmetry energy at ICNT2013

Horowitz et al., arXiv:1401.5839.



重イオン衝突や核構造の情報から

# アイソトープ分布が満たす熱化学平衡的關係式

$Y_i(N, Z)$ : 反応  $i$  におけるフラグメント原子核 ( $N, Z$ ) の生成量

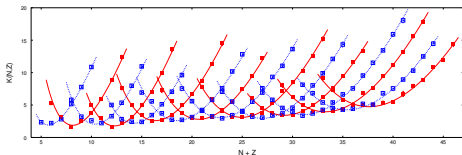
AMD simulations for  $^{60}\text{Ca} + ^{60}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca} + ^{48}\text{Ca}$ ,  $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $^{46}\text{Fe} + ^{46}\text{Fe}$   
 ( $b = 0$ ,  $E/A = 35$  MeV,  $t = 300$  fm/c)

The AMD results satisfy isoscaling:

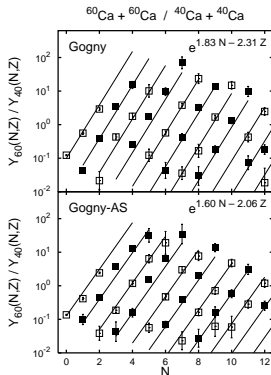
$$Y_i(N, Z) = \exp\left[-K(N, Z) + \alpha_i N + \beta_i Z\right]$$

(a)  $\frac{Y_i(N, Z)}{Y_j(N, Z)} = e^{(\alpha_i - \alpha_j)N + (\beta_i - \beta_j)Z}$

(b)  $Y_i(N, Z)e^{-\alpha_i N - \beta_i Z} = e^{-K(N, Z)}$  : indep. of  $i$



AO et al., PRC68(2003)051601(R),  
 PRC70(2004)041604(R)



# アイソトープ分布が満たす熱化学平衡的關係式

$Y_i(N, Z)$ : 反応  $i$  におけるフラグメント原子核  $(N, Z)$  の生成量

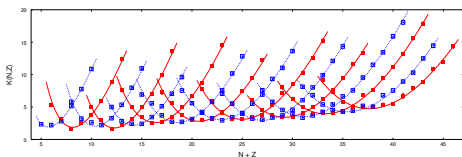
AMD simulations for  $^{60}\text{Ca} + ^{60}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca} + ^{48}\text{Ca}$ ,  $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ ,  $^{46}\text{Fe} + ^{46}\text{Fe}$   
( $b = 0$ ,  $E/A = 35$  MeV,  $t = 300$  fm/c)

The AMD results satisfy isoscaling:

$$Y_i(N, Z) = \exp[-K(N, Z) + \alpha_i N + \beta_i Z]$$

$$(a) \quad \frac{Y_i(N, Z)}{Y_j(N, Z)} = e^{(\alpha_i - \alpha_j)N + (\beta_i - \beta_j)Z}$$

$$(b) \quad Y_i(N, Z)e^{-\alpha_i N - \beta_i Z} = e^{-K(N, Z)} : \text{indep. of } i$$



AO et al., PRC68(2003)051601(R),  
PRC70(2004)041604(R)

Fitted well by

$$K(N, Z) =$$

$$\xi(Z)N + \eta(Z) + \zeta(Z) \frac{(N-Z)^2}{N+Z}$$

• Equilibrium

$$\Rightarrow K(N, Z) = -\frac{FAZ}{T}$$

$$\Rightarrow \zeta(Z) \sim \frac{C_{\text{sym}}}{T}$$

# What can we learn from $\zeta(Z)$ ?

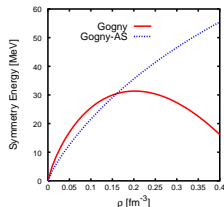
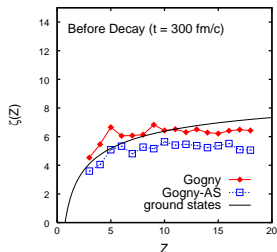
- $\zeta(Z)$  の  $Z$  依存性は弱い .
- The values of  $\zeta(Z)$  for Gogny and Gogny-AS are explained if

$$\zeta = \frac{C_{\text{sym}}(\rho \approx \frac{1}{2}\rho_0)}{T} \quad \text{and} \quad T \approx 3.4 \text{ MeV}$$

c.f.  $Y(Z)$  と  $\langle E^*/A \rangle$  から得られた温度:

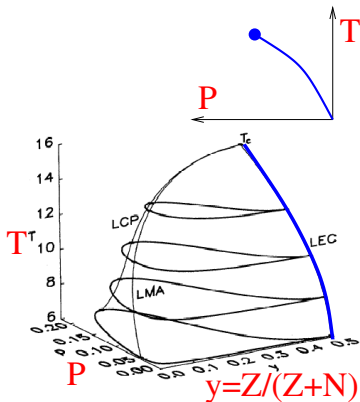
$$T = 4.1 \text{ MeV} \quad \text{at } t = 300 \text{ fm/c}$$

$t = 300 \text{ fm/c}$  での励起エネルギーもアイソトープ分布の幅も, 概ね 3-4 MeV の温度で説明できる .

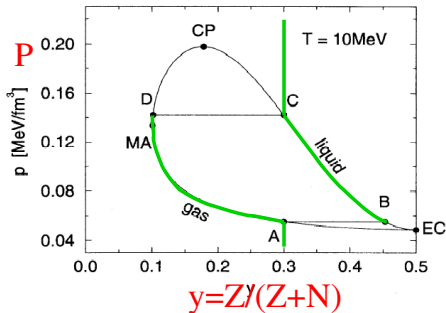


# 非対称核物質における蒸留

$$(\rho, T) \rightarrow (\rho_n, \rho_p, T) \text{ or } (\rho, \delta, T) \quad \delta = (\rho_n - \rho_p) / (\rho_n + \rho_p)$$



Fractionation / Distillation = 分留 / 蒸留



H. Müller and B.D. Serot, PRC52(1995) 2072

非対称核物質の状態方程式は、中性子星・超新星爆発などとも密接に関連

- 経験的に、重イオン衝突の多くの側面は、熱平衡の概念で理解することができる。
- AMD のような輸送モデルは、衝突において熱平衡に意味があるかどうかを確かめる道具として役に立つ。
- 有限系のミクロカノニカルアンサンブルにおいて、液相気相相転移を議論することができる。
- AMD は量子力学的（フェルミ粒子的）統計性と矛盾がなく、かつ、液相気相相転移を示す。
- フラグメントの観測量（アイソトープ分布など）は、低密度核物質の情報をもっている。

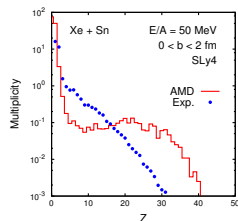
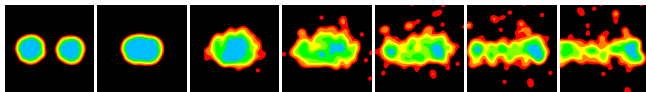
1. 重イオン衝突の概観
2. 平均場理論
3. 分子動力学
4. 一粒子的量子分岐による拡張
5. 熱平衡の観点から
6. クラスタ関連
  - クラスタの重要性
  - AMD の拡張
7. 状態方程式と重イオン衝突



# Multifragmentation(?) in Xe + Sn Collisions

Xe + Sn central collisions at 50 MeV/nucleon

Without cluster correlations (AMD with NN collisions)

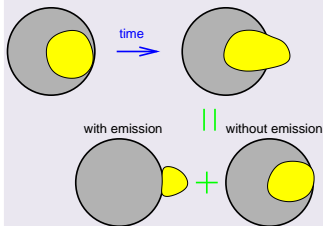


- Expansion is not sufficient.
- Too many nucleons are emitted.

- AMD with NN collisions
- INDRA data, Hudan et al., PRC 67 (2003)

|             | AMD  | INDRA |
|-------------|------|-------|
| $M(p)$      | 40.2 | 8.4   |
| $M(\alpha)$ | 2.5  | 10.1  |

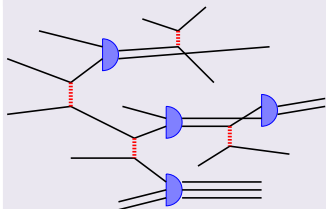
# AMD 拡張の二つの方向



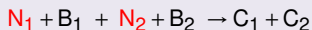
Wave-packet splitting: Give fluctuation to each wave packet centroid, based on the **single-particle motion**.

$$\frac{d}{dt} Z = \{Z, \mathcal{H}\}_{\text{PB}} + (\text{NN Collision}) \\ + (\text{W.P. Splitting}) + (\text{E. Conservation})$$

AO and Horiuchi, PPNP53 (2004) 501



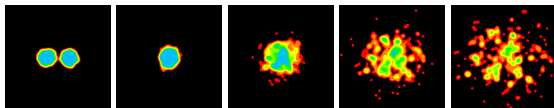
At each two-nucleon collision, **cluster formation** is considered for the final state.



$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \text{CC} | V_{NN} | \text{NBNB} \rangle|^2 \delta(\mathcal{H} - E)$$

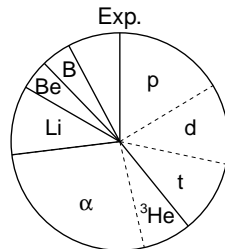
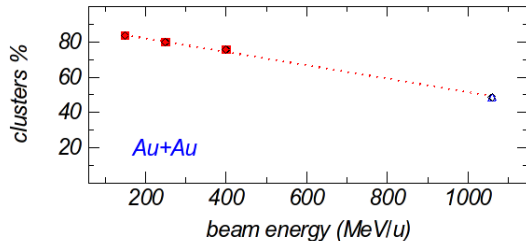
AO, J. Phys. Conf. Ser. 420 (2013) 012103

# 高エネルギーでのクラスター生成



Au + Au at 150 MeV/u

Reisdorf et al., NPA612(1997)493.

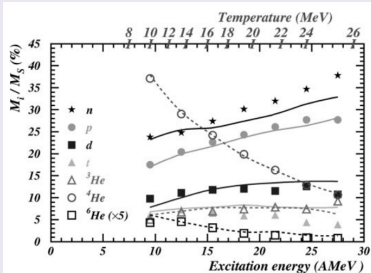


- Clusters (and fragments) are always the important part of the system.

## Heavy-Ion Collisions

Experimental data of cluster abundance in  $^{36}\text{Ar} + ^{58}\text{Ni}$  for the events where the quasi-projectile is **vaporized**.

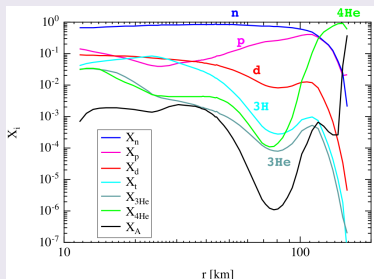
Borderie et al., EPJA6 (1999) 197, PLB388 (1996) 224.



## Supernova

Abundance of light clusters in the post-bounce supernova core, based on nuclear statistical equilibrium.

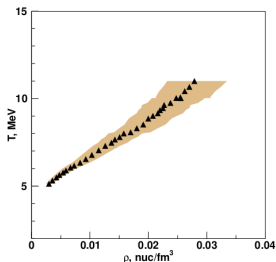
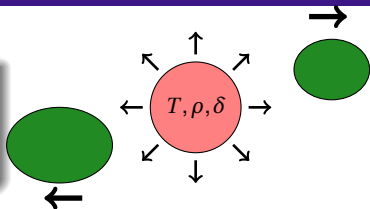
Sumiyoshi and Röpke, PRC77 (2008) 055804.



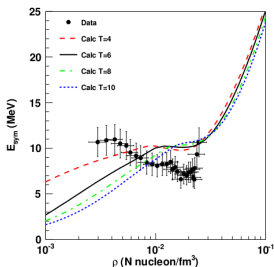
# Clusters at low densities in HIC (from Texas A&M)

Assume that the particles with the same velocity  $v_{\text{surf}}$  were emitted from the same source.

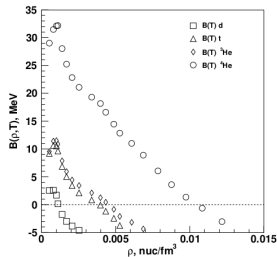
$$v_{\text{surf}} \leftrightarrow t_{\text{emission}} \leftrightarrow \{T, \rho, \delta\} \leftrightarrow Y_{NZ} \text{ (clusters)}$$



Qin et al.,  
PRL108(2012)172701



Wada et al.,  
PRC85(2012)064618

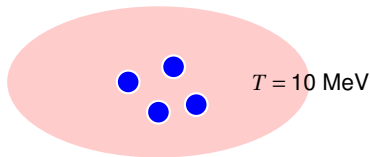


Hagel et al.,  
PRL108(2012)062702

Justification by dynamical models is desirable.

# クラスターの有無とエネルギーバランス

例： 温度  $T = 10 \text{ MeV}$  の環境下の 4 核子



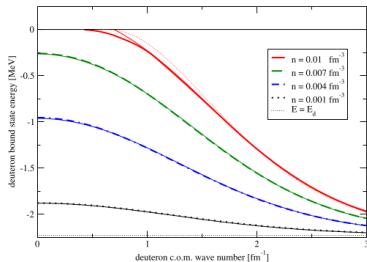
- 相関なしの場合:  $\langle E \rangle = \frac{3}{2} T \times 4 = 60 \text{ MeV}$
- $\alpha$  クラスターを作る場合:  $\langle E \rangle = \frac{3}{2} T \times 1 - 28.3 \text{ MeV} = -13.3 \text{ MeV}$

クラスターの有無により，エネルギーのバランスが相当に違ってくる．

# 媒質中のクラスター

## 媒質中の重陽子の方程式

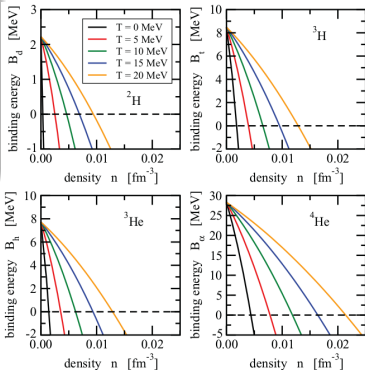
$$\begin{aligned} & \left[ e\left(\frac{1}{2}\mathbf{P} + \mathbf{p}\right) + e\left(\frac{1}{2}\mathbf{P} - \mathbf{p}\right) \right] \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \\ & + \left[ 1 - f\left(\frac{1}{2}\mathbf{P} + \mathbf{p}\right) - f\left(\frac{1}{2}\mathbf{P} - \mathbf{p}\right) \right] \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{p} | v | \mathbf{p}' \rangle \tilde{\psi}(\mathbf{p}') \\ & = E \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \end{aligned}$$



結合エネルギーの運動量 ( $\mathbf{P}$ ) 依存性

Röpke, NPA867 (2011) 66.

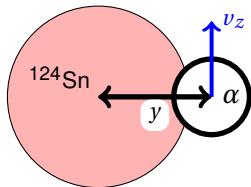
## Typel et al, PRC81(2010)015803



●  $\mathbf{P} = 0$ : 媒質中に静止したクラスター

●  $T$ : 媒質の温度

# 原子核中に追加したクラスター (AMD)



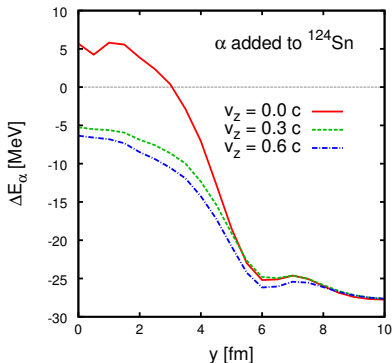
$\alpha$  クラスター  $|\alpha, Z\rangle$ : 異なるスピン・アイソスピンの 4 波束を位相空間の同じ点  $Z$  に置く .

$$E_\alpha: \mathcal{A} |\alpha, Z\rangle |^{124}\text{Sn}\rangle$$

$$E_N: \mathcal{A} |Z\rangle |^{124}\text{Sn}\rangle \quad (N = p \uparrow, p \downarrow, n \uparrow, n \downarrow)$$

$$-B_\alpha = \Delta E_\alpha = E_\alpha - (E_{p\uparrow} + E_{p\downarrow} + E_{n\uparrow} + E_{n\downarrow})$$

(Energies are defined relative to  $|^{124}\text{Sn}\rangle$ .)



$$\frac{\text{Re}Z}{\sqrt{v}} = (0, y, 0),$$

$$\frac{2\hbar\sqrt{v}\text{Im}Z}{M} = (0, 0, v_z)$$

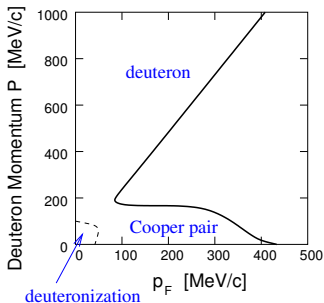
- 原子核中心からの距離  $y$  (密度依存性)
- $P_\alpha = M_\alpha v_z$  (運動量依存性)
- 有効相互作用の密度依存性もクラスターの結合エネルギーに影響している .

結合エネルギーはよいとしても, クラスターができる「確率」は...



Danielewicz and Bertsch, NPA 533 (1991) 712.

媒質中の重陽子 (ゼロ温度)



核子やクラスターの分布関数  $f_n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ ,  $f_p(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ ,  $f_d(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ ,  $f_t(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ ,  $f_h(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  の時間発展を (テスト粒子を使って) 解く .

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial U_n}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{p}} = I_n^{\text{coll}} [f_n, f_p, f_d, f_t, f_h]$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial U_p}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{p}} = I_p^{\text{coll}} [f_n, f_p, f_d, f_t, f_h]$$

$$\frac{\partial f_d}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial U_d}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{p}} = I_d^{\text{coll}} [f_n, f_p, f_d, f_t, f_h]$$

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_t}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_t}{\partial \mathbf{p}} = I_t^{\text{coll}} [f_n, f_p, f_d, f_t, f_h]$$

$$\frac{\partial f_h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_h}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial U_h}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_h}{\partial \mathbf{p}} = I_h^{\text{coll}} [f_n, f_p, f_d, f_t, f_h]$$

## 二核子衝突

$$W_{i \rightarrow m} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_m | V | \Psi_i \rangle|^2 \delta(E_m - E_i)$$

$$\sum_m |\Psi_m\rangle \langle \Psi_m| = 1$$

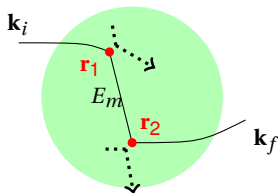
二核子衝突の終状態（多段階過程の中間状態）の完全系としては何が適当か？

- 普通は二核子のみ変化させる．

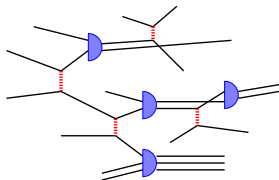
$$\sum_{k_1, k_2} \left| \varphi_{k_1}(1) \varphi_{k_2}(2) \Psi(3, 4, \dots) \right\rangle \left\langle \varphi_{k_1}(1) \varphi_{k_2}(2) \Psi(3, 4, \dots) \right|$$

- 媒質中で重陽子が安定ならば，...

$$\left| \varphi_{k_1}(1) \psi_d(2, 3) \Psi(4, \dots) \right\rangle \left\langle \varphi_{k_1}(1) \psi_d(2, 3) \Psi(4, \dots) \right| + \dots$$



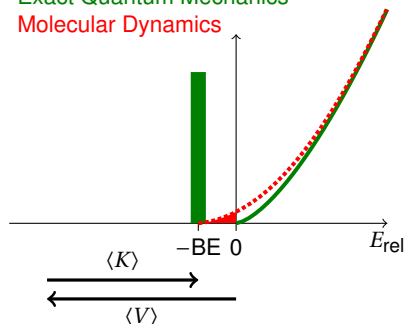
通常の二核子衝突は独立粒子近似に基づいていた．



1. 重イオン衝突の概観
2. 平均場理論
3. 分子動力学
4. 一粒子的量子分岐による拡張
5. 熱平衡の観点から
6. クラスタ関連
  - クラスタの重要性
  - AMD の拡張
7. 状態方程式と重イオン衝突

## 二核子系の状態密度

Exact Quantum Mechanics  
Molecular Dynamics



波束中心で見た場合，束縛する位相空間が  $h^3$  に比べて小さすぎる．

⇒ 二核子衝突の終状態で束縛されたクラスターができる確率が小さすぎる．

陽子と中性子の相対運動を考える．(AMDでも，重心運動と相対運動は分離している．)

### 量子力学と古典位相空間の対応

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} \hat{\mathbf{p}}^2 + V(\hat{\mathbf{r}})$$

$$\iint \theta\left(\frac{1}{2\mu} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r}) < 0\right) d\mathbf{r} d\mathbf{p} \sim (2\pi\hbar)^3$$

### 波束 (中心 $\mathbf{R}, \mathbf{P}$ ) で見ると

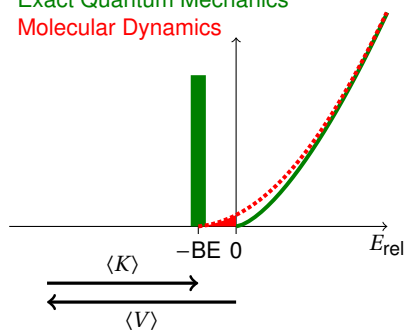
$$\mathcal{H} = \langle \hat{H} \rangle = \frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 + \mathcal{U}(\mathbf{R})$$

$$\iint \theta\left(\frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 + \mathcal{U}(\mathbf{R}) < 0\right) d\mathbf{R} d\mathbf{P} \ll (2\pi\hbar)^3$$

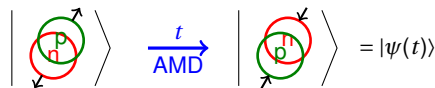
# AMD でもクラスターのための修正が必要なのか？ — 非線形性

## 二核子系の状態密度

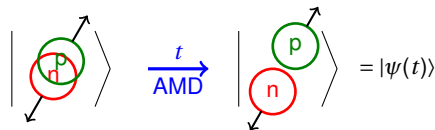
Exact Quantum Mechanics  
Molecular Dynamics



$\langle H \rangle < 0$  の場合



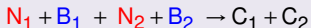
$\langle H \rangle > 0$  の場合



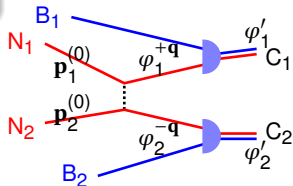
- $\langle H \rangle > 0$  であっても、初期時刻で束縛している確率  $|\langle d|\psi(t=0)\rangle|^2$  がある。
- 本来は  $|\langle d|\psi(t)\rangle|^2$  は保存するが、AMD では非線形性のために変動してしまう。
- このことを前提に、クラスター相関を導入する必要がある。

# クラスター生成の断面積

Similar to Danielewicz et al., NPA533 (1991) 712.



- $N_1, N_2$  : Colliding nucleons
- $B_1, B_2$  : Spectator nucleons/clusters
- $C_1, C_2$  :  $N, (2N), (3N), (4N)$  (up to  $\alpha$  cluster)



$$v_{NN} d\sigma(NBNB \rightarrow CC)$$

$$= |\langle \varphi_1' | \varphi_1^{+\mathbf{q}} \rangle|^2 |\langle \varphi_2' | \varphi_2^{-\mathbf{q}} \rangle|^2 |M|^2 \delta(\mathcal{H} - E) p_{\text{rel}}^2 dp_{\text{rel}} d\Omega$$

$$\left( v_{NN} d\sigma_{NN} = |M|^2 \delta(\mathcal{H} - E) p_{\text{rel}}^2 dp_{\text{rel}} d\Omega \right)$$

二核子衝突断面積を決めれば，決まる．

$$\mathbf{p}_{\text{rel}} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) = p_{\text{rel}} \hat{\Omega}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^{(0)} = \mathbf{p}_2^{(0)} - \mathbf{p}_2$$

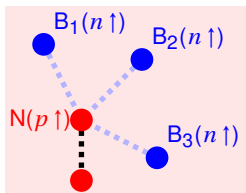
$$\varphi_1^{+\mathbf{q}} = \exp(+i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_{N_1}) \varphi_1^{(0)}$$

$$\varphi_2^{-\mathbf{q}} = \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_{N_2}) \varphi_2^{(0)}$$

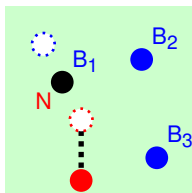
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = F_{\text{kin}} |\langle \varphi_1' | \varphi_1^{+\mathbf{q}} \rangle|^2 |\langle \varphi_2' | \varphi_2^{-\mathbf{q}} \rangle|^2 \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{NN \rightarrow NN}$$

# Construction of Final States

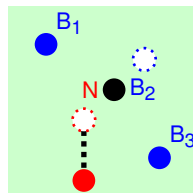
Clusters (in the final states) are assumed to have  $(0s)^N$  configuration.



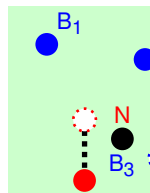
$|\Phi^{\mathbf{q}}\rangle$   
After  $\mathbf{p}^{(0)} \rightarrow \mathbf{p}^{(0)} + \mathbf{q}$



$|\Phi'_1\rangle$   
 $N + B_1 \rightarrow C_1$



$|\Phi'_2\rangle$   
 $N + B_2 \rightarrow C_2$



$|\Phi'_3\rangle$   
 $N + B_3 \rightarrow C$

Final states are not orthogonal:  $N_{ij} \equiv \langle \Phi'_i | \Phi'_j \rangle \neq \delta_{ij}$

The probability of cluster formation with one of B's:

$$\hat{P} = \sum_{ij} |\Phi'_i\rangle N_{ij}^{-1} \langle \Phi'_j|, \quad P = \langle \Phi^{\mathbf{q}} | \hat{P} | \Phi^{\mathbf{q}} \rangle \neq \sum_i |\langle \Phi'_i | \Phi^{\mathbf{q}} \rangle|^2$$

- $\left\{ \begin{array}{l} P \\ 1 - P \end{array} \right. \Rightarrow$  Choose one of the candidates and make a cluster.
- $\left\{ \begin{array}{l} P \\ 1 - P \end{array} \right. \Rightarrow$  Don't make a cluster (with any  $n\uparrow$ ).

# An algorithm to decide cluster formation

decide to do a collision based on  $(d\sigma/d\Omega)_{NN}$

$C = N$

do for **species** in  $p \uparrow, p \downarrow, n \uparrow, n \downarrow$  (in a random order)

$P$  = probability that  $C$  forms a cluster with a nucleon of **species**

- taking care of the non-orthogonality
- taking care of the  $p_{rel}$ -dependence of the phase space factors and the overlap probabilities

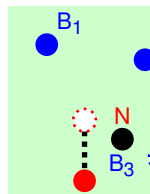
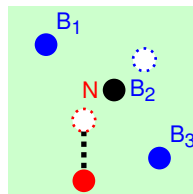
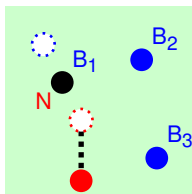
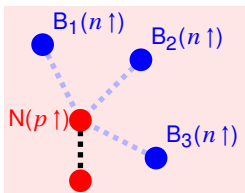
if  $\text{rand}() < P$  then

choose a nucleon  $B$  of **species**

$C = C + B$  ! put the wave packets at the same phase space point

endif

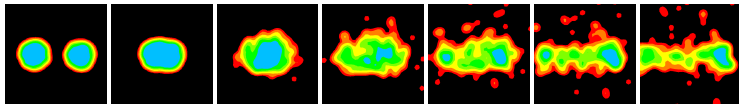
enddo



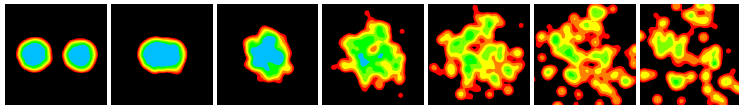


# クラスター相関の効果：密度の時間発展とクラスター数

Without cluster correlations (AMD with NN collisions)



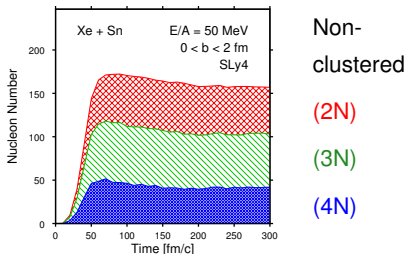
With cluster correlations



時間の経過とともに、クラスターは...

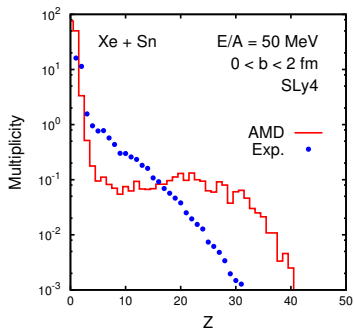
- 二核子衝突で作られ、
- 運動方程式に従って動き、
- 二核子衝突で壊れる。

これを何度でも繰り返す。

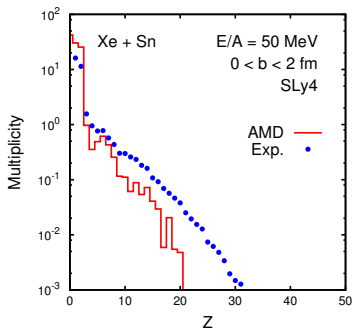


# クラスター相関の効果：フラグメントの電荷分布

Without Clusters

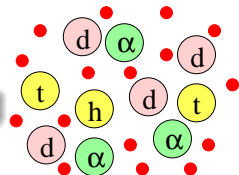


With Clusters

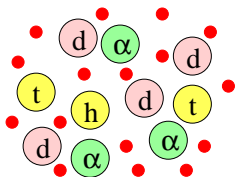


|                                 | w/o C | with C | INDRA    |
|---------------------------------|-------|--------|----------|
| $M(p)$                          | 40.2  | 10.9   | 8.4      |
| $M(\alpha)$                     | 2.5   | 23.2   | 10.1     |
| $Z_{\text{gas}}/Z_{\text{tot}}$ | 55%   | 78%    | (40-50%) |

クラスターガス化



# クラスター間の相関も必要



各クラスターの重心運動は，AMD ではほぼ古典的．

- クラスターとクラスターの束縛エネルギーはほぼ正しい．
- 束縛している位相空間が狭すぎる．

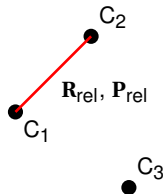
e.g.  ${}^7\text{Li} = \alpha + t - 2.5 \text{ MeV}$

クラスター結合が必要:  $|\alpha + t\rangle \rightarrow |{}^7\text{Li}\rangle$  with probability  $|\langle {}^7\text{Li}|\alpha + t\rangle|^2$  (例)

At every time step, **Clusters  $C_1$  and  $C_2$  are bound:**  $\mathbf{P}_{\text{rel}} \rightarrow 0$ ,

- **if**  $C_j$  is the cluster closest to  $C_i$ ,  $(i, j) = (1, 2)$  or  $(2, 1)$ ,
- **and if** they are moderately separated,  $|\mathbf{R}_{\text{rel}}| < R_{\text{max}}$ ,
- **and if** they are moving slowly away from each other,  
 $|\mathbf{P}_{\text{rel}}| < P_{\text{max}}$  and  $\mathbf{P}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{R}_{\text{rel}} > 0$ .

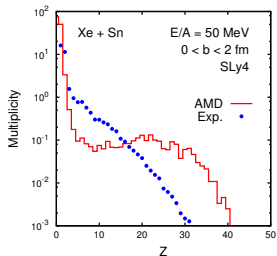
$$P_{\text{max}}^2/2\mu = 8 \text{ MeV}, \quad R_{\text{max}} = 5 \text{ fm} \quad (\text{adjustable})$$



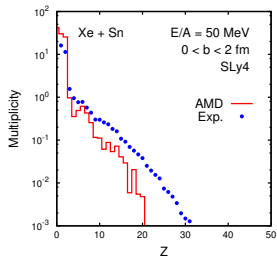
Energy is conserved by scaling the relative momentum between the  $C_1$ - $C_2$  pair and a third cluster  $C_3$ .

# クラスター相関 + クラスター間相関の効果

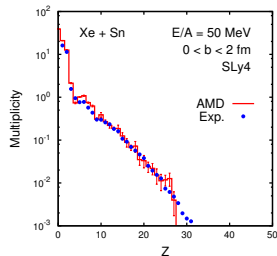
## Usual NN collisions



## With Clusters



## With C & C-C

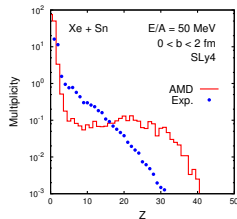
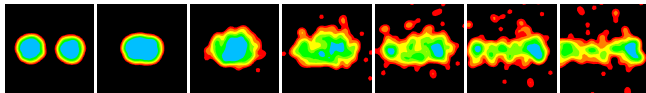


|                                 | w/o C | with C | C & C-C | INDRA    |
|---------------------------------|-------|--------|---------|----------|
| $M(p)$                          | 40.2  | 10.9   | 10.8    | 8.4      |
| $M(\alpha)$                     | 2.5   | 23.2   | 10.7    | 10.1     |
| $Z_{\text{gas}}/Z_{\text{tot}}$ | 55%   | 78%    | 43%     | (40-50%) |

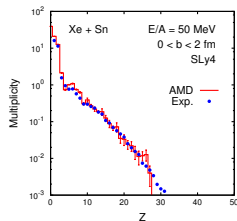
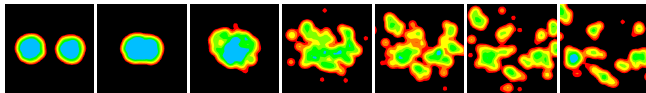
# Effect of Cluster and C-C Correlations

Xe + Sn central collisions at 50 MeV/nucleon

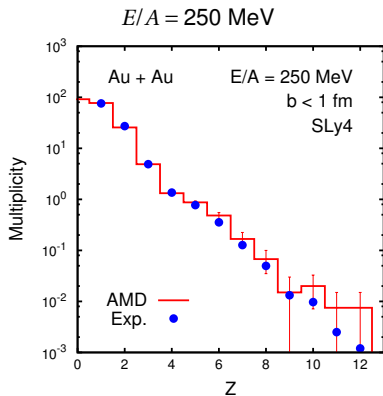
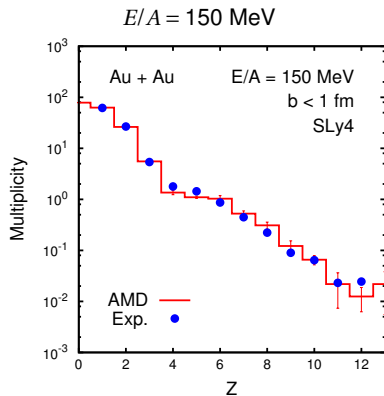
Without cluster correlations (AMD with NN collisions)



With cluster and cluster-cluster correlations



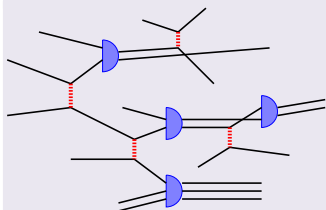
# AMD results: Au + Au Central Collisions at 150 and 250 MeV/nucleon



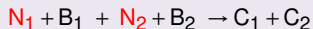
|                                 | with C & C-C | FOPI |
|---------------------------------|--------------|------|
| $M(p)$                          | 32.8         | 26.1 |
| $M(\alpha)$                     | 20.1         | 21.0 |
| $Z_{\text{gas}}/Z_{\text{tot}}$ | 71%          | 73%  |

|                                 | with C & C-C | FOPI |
|---------------------------------|--------------|------|
| $M(p)$                          | 42.0         | 31.9 |
| $M(\alpha)$                     | 19.4         | 18.2 |
| $Z_{\text{gas}}/Z_{\text{tot}}$ | 80%          | 83%  |

FOPI data: Reisdorf et al., NPA 612 (1997) 493.



各々の二核子衝突で，終状態でのクラスター生成を考慮．



$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle CC | V_{NN} | NBNB \rangle|^2 \delta(\mathcal{E} - E)$$

AO, J. Phys. Conf. Ser. 420 (2013) 012103

- 終状態のクラスターとしては，単独核子から  $\alpha$  クラスターまでを考え，複数のガウス波束を同じ位相空間の点に置くことで表す．
- 二核子の行列要素  $|\langle NN | V_{NN} | NN \rangle|^2$  としては，通常の二核子衝突と同じものを用いる ( $\leftarrow \sigma_{NN}$ )．
- 結果として，「クラスター + 核子」や「クラスター + クラスター」の弾性散乱や非弾性衝突も含まれる．
- 二核子衝突の終状態で，クラスターを作る組み合わせが多数あるので，適切に定式化する必要があった．
- クラスターとクラスターの間に関連（複数クラスターの結合）も別途考慮する．

1. 重イオン衝突の概観
2. 平均場理論
3. 分子動力学
4. 一粒子的量子分岐による拡張
5. 熱平衡の観点から
6. クラスタ相関
7. 状態方程式と重イオン衝突
  - 数十 MeV/nucleon (低密度)
  - 数百 MeV/nucleon (高密度)



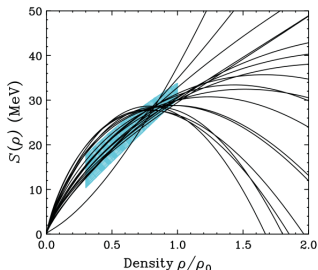
# 対称エネルギー

## 核物質の EOS (ゼロ温度)

$$(E/A)(\rho_p, \rho_n) = (E/A)_0(\rho) + S(\rho)\delta^2 + \dots$$

$$\rho = \rho_p + \rho_n, \quad \delta = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho_n + \rho_p}$$

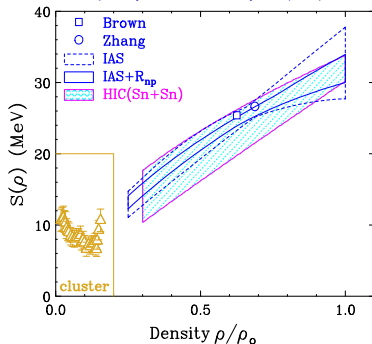
- $S_0 = S(\rho_0)$
- $L = 3\rho_0(dS/d\rho)_{\rho=\rho_0}$



$S(\rho)$  for Skyrme interactions

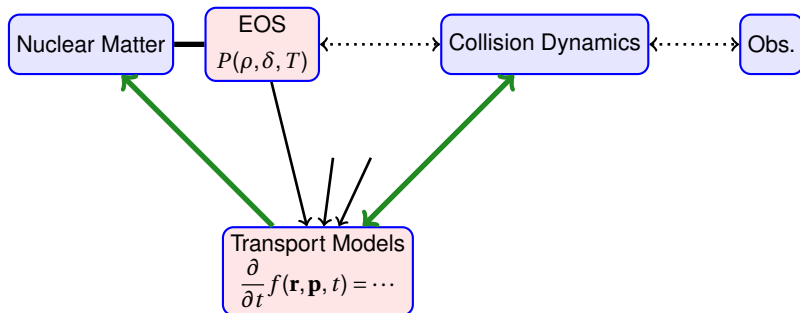
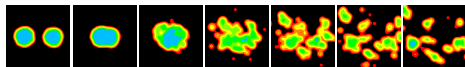
## 対称エネルギー $S(\rho)$ の制限

Horowitz et al., J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 41 (2014) 093001.



- 高密度での  $S(\rho \sim 2\rho_0)$  は？
- 低密度ではクラスターが重要

# Linking Nuclear Matter and HIC



核物質, EOS  $\Leftrightarrow$  重イオン衝突ダイナミクス  $\Leftrightarrow$  観測量  
関係はどの程度直接的か？  
メカニズムの十分な理解が必要

# アイソスピン拡散

中性子過剰な物質と陽子過剰な物質の界面（ネック領域）を通してのアイソスピン拡散



様々なモデル計算と実験との比較  
(MSU data for  $^{112,124}\text{Sn} + ^{112,124}\text{Sn}$   
at 50 MeV/nucleon)

## Isospin Transport Ratio $R_i$

- $R_i = 1$  : no diffusion
- $R_i = 0$  : complete mixing

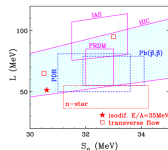
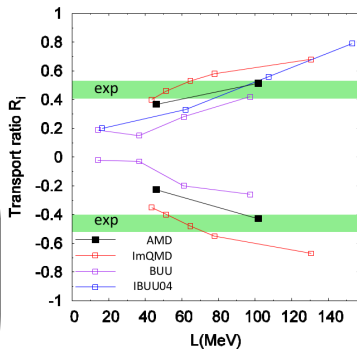
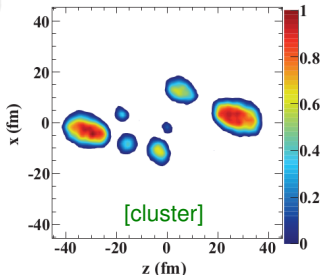
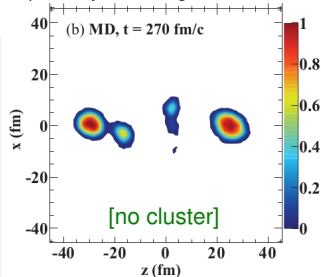


Figure by T. Akaishi

# アイソスピン拡散を決める要素

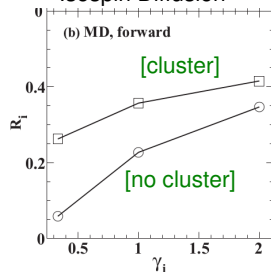
Coupland, Lynch, Tsang, Danielewicz, Zhang, PRC 84 (2011) 054603.

- 対称エネルギー
- 二核子衝突断面積
- 衝突パラメータ
- 反応ダイナミクス
  - ネックの形成
  - 相互作用の時間
- クラスタ関連



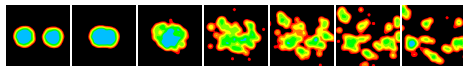
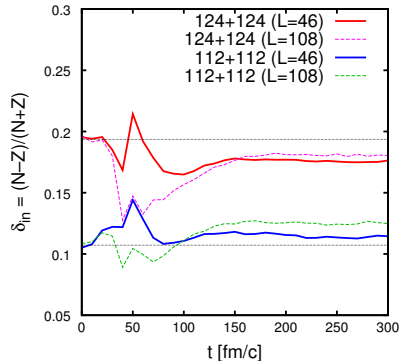
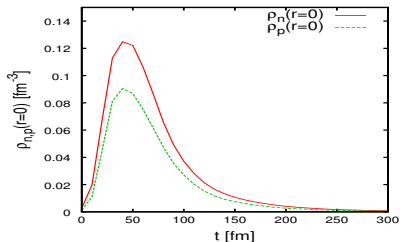
BUU 計算  
(クラスターあり・なし)

Isospin Diffusion



$\gamma_i$ : density-dep. of  $E_{\text{sym}}$

# 圧縮・膨張する系での中性子と陽子の運動

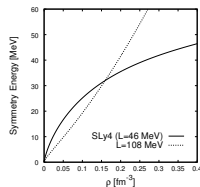


Sn + Sn central collisions at  $E/A = 50$  MeV

- $^{124}\text{Sn} + ^{124}\text{Sn}$
- $^{112}\text{Sn} + ^{112}\text{Sn}$

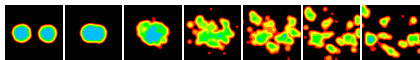
Skyrme force

- SLy4 ( $L = 46$  MeV)
- $L = 108$  MeV

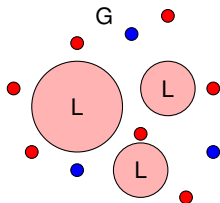


- 圧縮時の対称エネルギーの効果は顕著 .
- 観測できるかという問題 .

## 二成分系の液相気相相転移



At a late stage of reaction

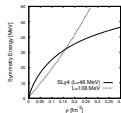
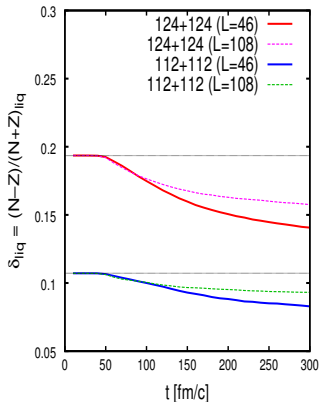


Fractionation/Distillation/蒸留

$$\delta(\text{liquid}) < \delta(\text{gas})$$

- Gas =  $\sum(A \leq 4 \text{ particles})$
- Liquid =  $\sum(A > 4 \text{ fragments})$
- Total = Gas + Liquid

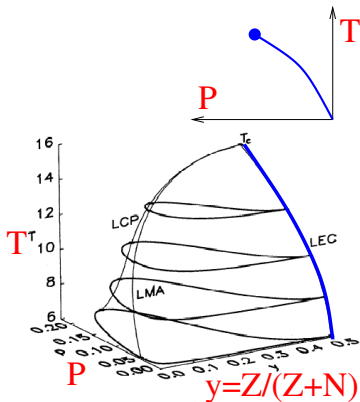
液体部分の陽子中性子非対称度  $\delta_{\text{liq}}$



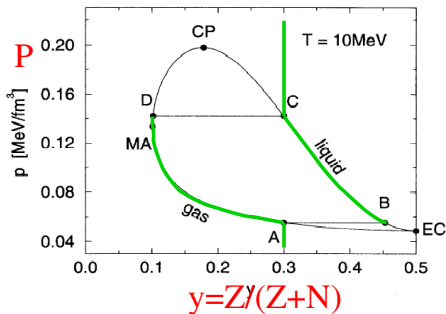
- 液体部分を見る
- 気体部分を見る

# 非対称核物質における蒸留

$$(\rho, T) \rightarrow (\rho_n, \rho_p, T) \text{ or } (\rho, \delta, T) \quad \delta = (\rho_n - \rho_p) / (\rho_n + \rho_p)$$



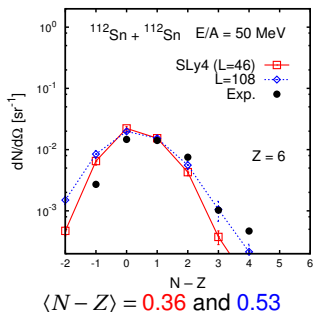
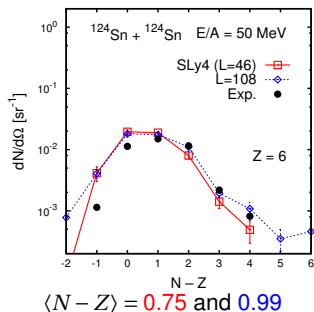
Fractionation / Distillation = 分留 / 蒸留



H. Müller and B.D. Serot, PRC52(1995) 2072

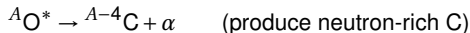
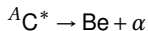
非対称核物質の状態方程式は、中性子星・超新星爆発などとも密接に関連

MSU Data: T.X. Liu et al., PRC 014603 (2004).



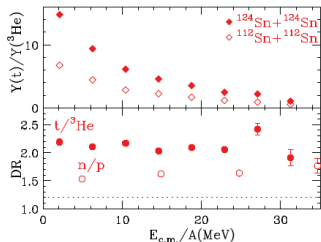
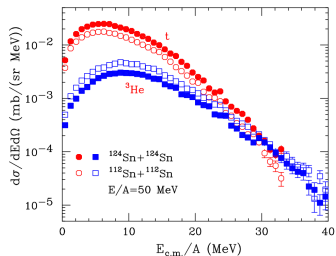
- The average asymmetry and the width are sensitive to the symmetry energy.
- Compared to data,  $Z \geq N$  fragments are overproduced.

More precise description of the decay of excited fragments may be necessary.



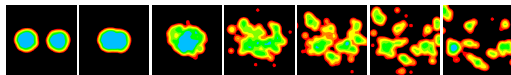


# $n/p$ や $t/{}^3\text{He}$ のスペクトル



Liu et al., PRC86(2012)024605.

More recent data in M. Youngs presentation at NuSYM13.



MSU data of

- spectrum of tritons ( ${}^3\text{H}$ )
- spectrum of  ${}^3\text{He}$

in central collisions at 50 MeV/nucleon

- Filled:  ${}^{124}\text{Sn} + {}^{124}\text{Sn}$
- Open:  ${}^{112}\text{Sn} + {}^{112}\text{Sn}$

## ${}^3\text{He}$ パズル

${}^3\text{H}$  と  ${}^3\text{He}$  の違いがなぜそんなに大きいのか？

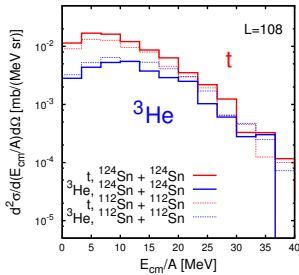
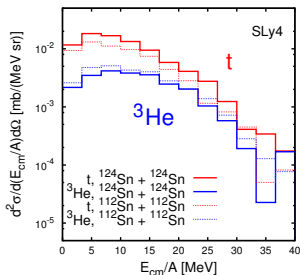
- クーロン力の効果だけでは説明できない.
- 何らかのアイソスピン効果か？

# クラスター (t と $^3\text{He}$ ) のエネルギースペクトル — AMD の結果

$^{124}\text{Sn} + ^{124}\text{Sn}$  and  $^{112}\text{Sn} + ^{112}\text{Sn}$  central collisions at 50 MeV/u ( $60^\circ < \theta_{\text{cm}} < 120^\circ$ )

SLy4 ( $L = 46$  MeV)

$L = 108$  MeV

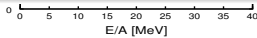
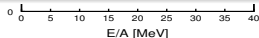
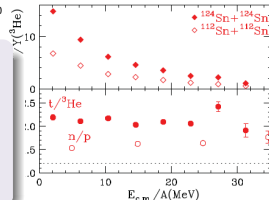


Dependence on

- t or  $^3\text{He}$
- Symmetry energy  $L$
- $(N/Z)_{\text{system}}$

$Y(t)/Y(^3\text{He})$  ratio for  $^{124}\text{Sn} + ^{124}\text{Sn}$

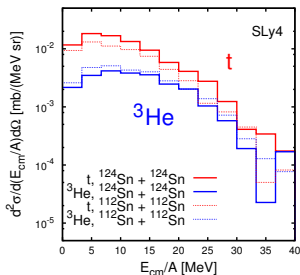
|                | $L = 46$ | $L = 108$ |
|----------------|----------|-----------|
| $E/A < 10$ MeV | 4.76     | 3.57      |
| $E/A > 20$ MeV | 2.25     | 1.65      |



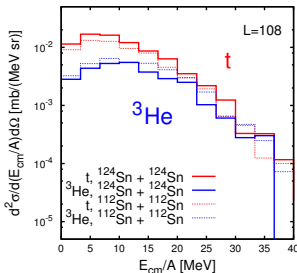
# クラスター (t と $^3\text{He}$ ) のエネルギースペクトル — AMD の結果

$^{124}\text{Sn} + ^{124}\text{Sn}$  and  $^{112}\text{Sn} + ^{112}\text{Sn}$  central collisions at 50 MeV/u ( $60^\circ < \theta_{\text{cm}} < 120^\circ$ )

SLy4 ( $L = 46$  MeV)

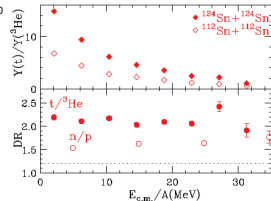
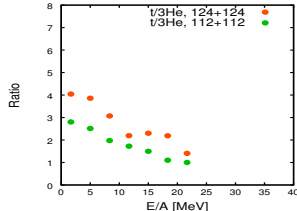
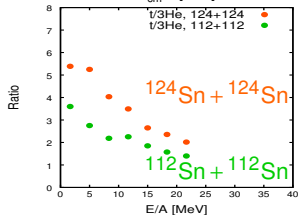


$L = 108$  MeV



Dependence on

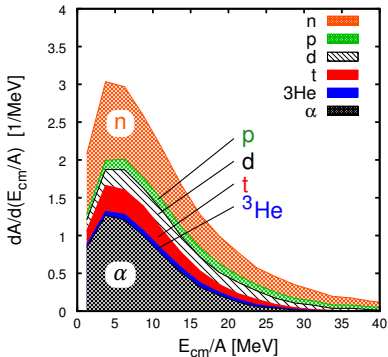
- t or  $^3\text{He}$
- Symmetry energy  $L$
- $(N/Z)_{\text{system}}$



# 気体部分の組成

$^{124}\text{Sn} + ^{124}\text{Sn}$  central collisions at 50 MeV/u

Light particles emitted to  $60^\circ < \theta_{\text{cm}} < 120^\circ$



気体核子の速度分布  
(重心系)

気体部分の陽子・中性子の割合

$60^\circ < \theta_{\text{cm}} < 120^\circ$ ,  $0 < E_{\text{cm}}/A < 5$  MeV

|                | #n   | #p   | n/p  |
|----------------|------|------|------|
| gas            | 8.62 | 4.16 | 2.07 |
| $\alpha$       | 2.63 | 2.63 |      |
| gas - $\alpha$ | 5.99 | 1.53 | 3.92 |

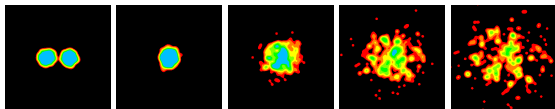
もしも  $\alpha$  粒子が 10%多くできたとしたら  
(かつ気体全体の#n と#p が変わらなければ)

|                | #n   | #p   | n/p  |
|----------------|------|------|------|
| gas            | 8.62 | 4.16 | 2.07 |
| $\alpha$       | 2.89 | 2.89 |      |
| gas - $\alpha$ | 5.73 | 1.27 | 4.51 |

$t/{}^3\text{He}$  比や n/p 比を正確に予言するには,  $\alpha$  粒子の生成を十分に理解する必要がある.

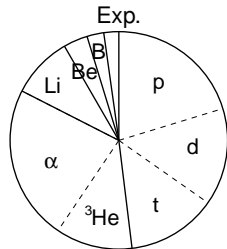
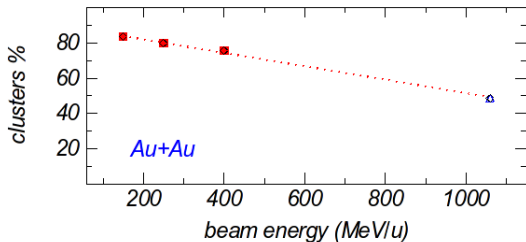
1. 重イオン衝突の概観
2. 平均場理論
3. 分子動力学
4. 一粒子的量子分岐による拡張
5. 熱平衡の観点から
6. クラスタ相関
7. 状態方程式と重イオン衝突
  - 数十 MeV/nucleon (低密度)
  - 数百 MeV/nucleon (高密度)

# 比較的エネルギーの高い重イオン衝突でのクラスター生成



Au + Au at 150 MeV/u

Reisdorf et al., NPA612(1997)493.

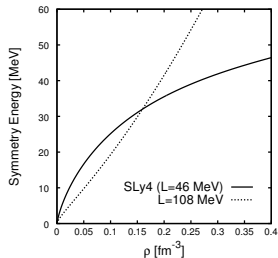


Au + Au at 250 MeV/u

- 高密度を探りたいと思っても、少なくとも反応後期はクラスターが重要。
- 反応の早い段階でもクラスターが重要か？

# 300 MeV/nucleon での中性子と陽子のダイナミクス

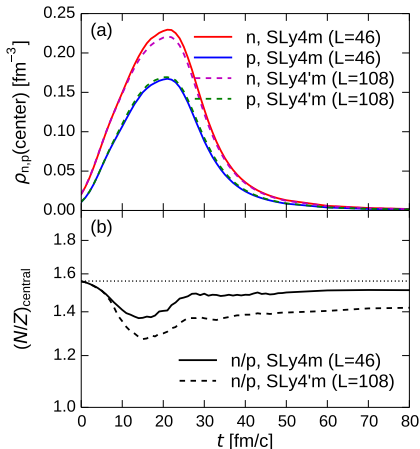
目的： $\rho \sim 2\rho_0$  での対称エネルギーを探る。



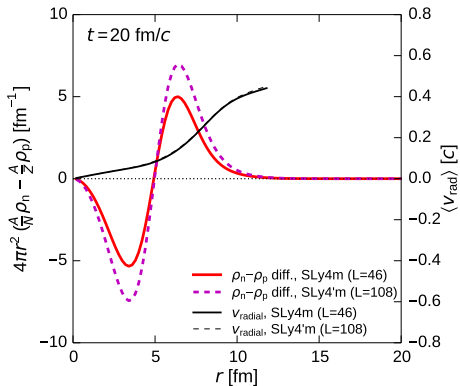
対称エネルギー  $\Rightarrow$  圧縮時  $\Rightarrow$  観測量

- 核子の観測量
- パイオンの観測量

$^{132}\text{Sn} + ^{124}\text{Sn}$ ,  $E/A = 300 \text{ MeV}$ ,  $b \sim 0$



“central”: 系の重心を中心とし、全核子の 25%を含む球

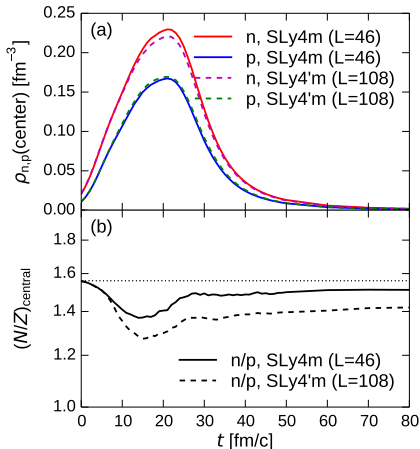


- 中性子と陽子の密度の差 ( $r$  の関数)

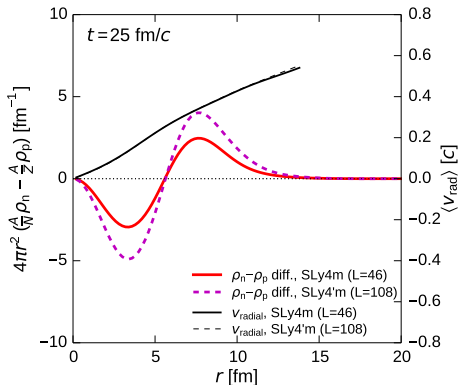
$$4\pi r^2 \left[ \frac{A}{N} \rho_n(r) - \frac{A}{Z} \rho_p(r) \right]$$

- 動径方向の膨張速度  $v_{\text{rad}}(r)$

$^{132}\text{Sn} + ^{124}\text{Sn}$ ,  $E/A = 300$  MeV,  $b \sim 0$





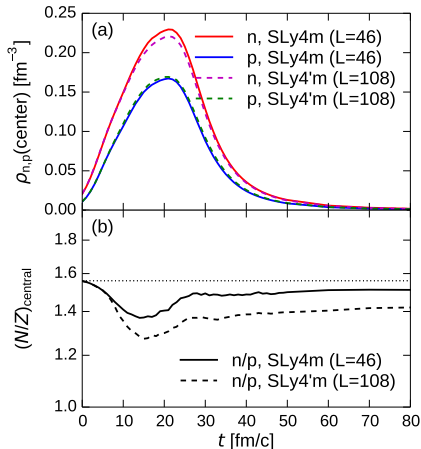


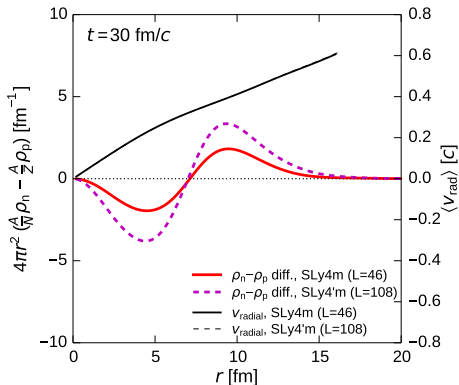
- 中性子と陽子の密度の差 ( $r$  の関数)

$$4\pi r^2 \left[ \frac{A}{N} \rho_n(r) - \frac{A}{Z} \rho_p(r) \right]$$

- 動径方向の膨張速度  $v_{\text{rad}}(r)$

$^{132}\text{Sn} + ^{124}\text{Sn}$ ,  $E/A = 300$  MeV,  $b \sim 0$



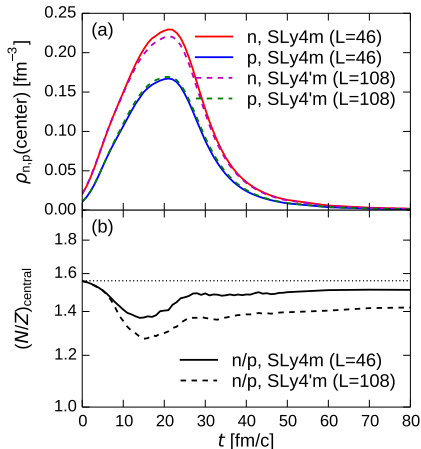


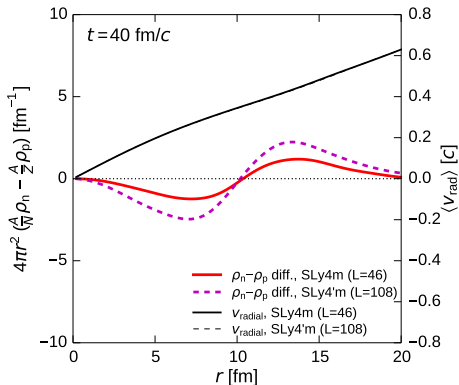
- 中性子と陽子の密度の差 ( $r$  の関数)

$$4\pi r^2 \left[ \frac{A}{N} \rho_n(r) - \frac{A}{Z} \rho_p(r) \right]$$

- 動径方向の膨張速度  $v_{\text{rad}}(r)$

$^{132}\text{Sn} + ^{124}\text{Sn}$ ,  $E/A = 300$  MeV,  $b \sim 0$



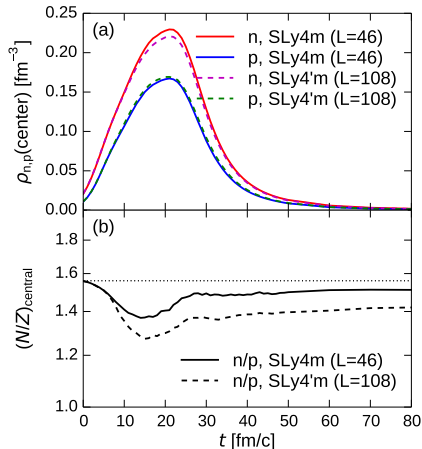


- 中性子と陽子の密度の差 ( $r$  の関数)

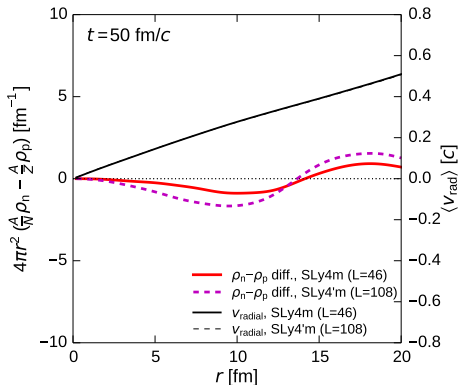
$$4\pi r^2 \left[ \frac{A}{N} \rho_n(r) - \frac{A}{Z} \rho_p(r) \right]$$

- 動径方向の膨張速度  $v_{\text{rad}}(r)$

$^{132}\text{Sn} + ^{124}\text{Sn}$ ,  $E/A = 300$  MeV,  $b \sim 0$



# 300 MeV/nucleon での圧縮・膨張

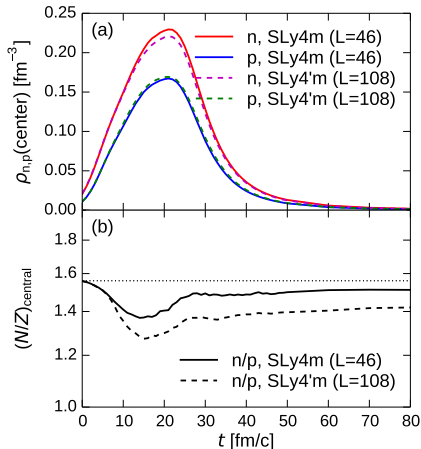


- 中性子と陽子の密度の差 ( $r$  の関数)

$$4\pi r^2 \left[ \frac{A}{N} \rho_n(r) - \frac{A}{Z} \rho_p(r) \right]$$

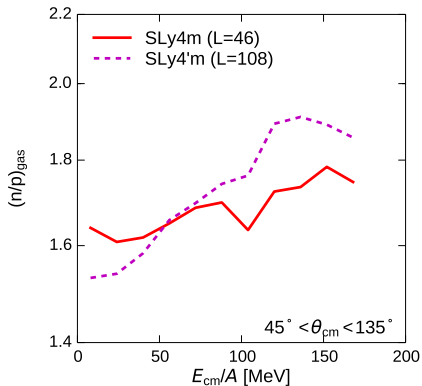
- 動径方向の膨張速度  $v_{\text{rad}}(r)$

$^{132}\text{Sn} + ^{124}\text{Sn}$ ,  $E/A = 300$  MeV,  $b \sim 0$



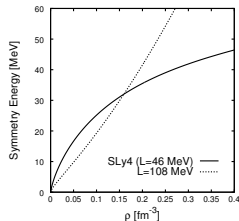
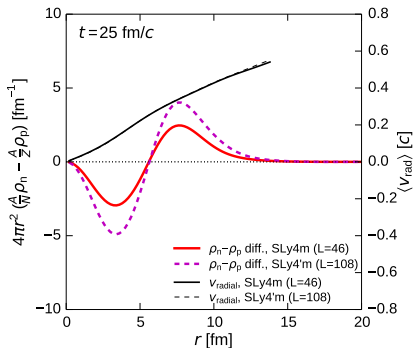
圧縮時の効果は後の時刻まで残っている . ⇒ 観測量 ?

# N/Z Spectrum Ratio — an observable

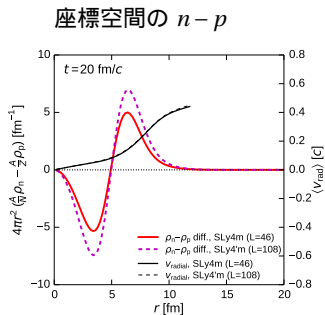


$$\left(\frac{N}{Z}\right)_{\text{gas}} = \frac{Y_n(v) + Y_d(v) + 2Y_t(v) + Y_h(v) + 2Y_\alpha(v)}{Y_p(v) + Y_d(v) + Y_t(v) + 2Y_h(v) + 2Y_\alpha(v)}$$

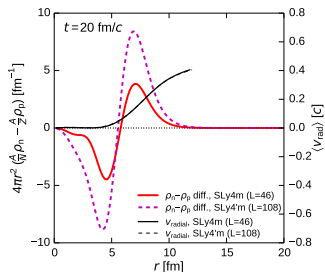
スペクトルの  $N/Z$  比は、反応初期の中性子と陽子の密度差に似ている。



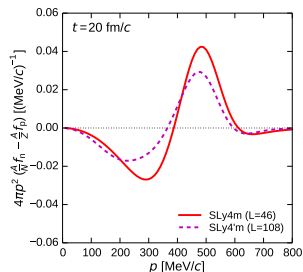
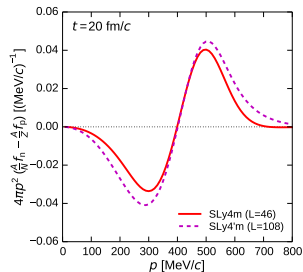
クラスターあり



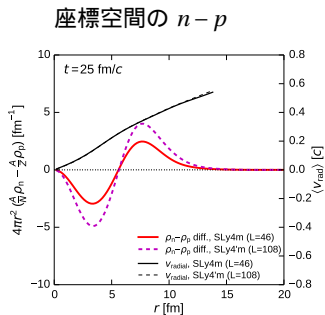
クラスターなし



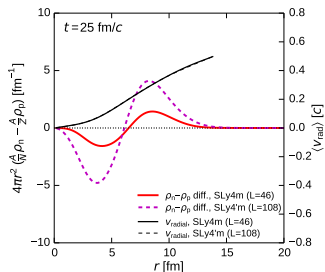
運動量空間の  $n-p$



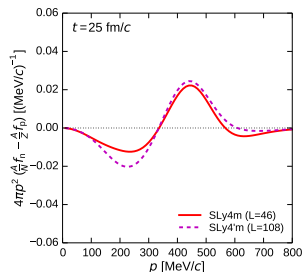
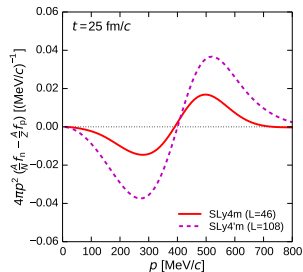
クラスターあり



クラスターなし

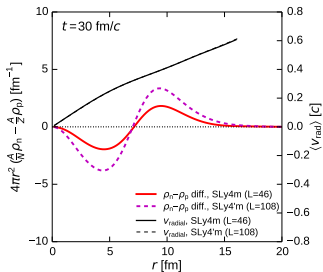


運動量空間の  $n-p$

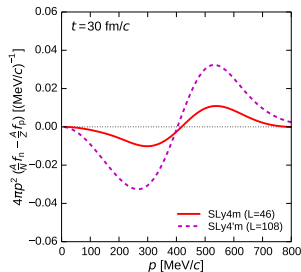


クラスターあり

座標空間の  $n-p$

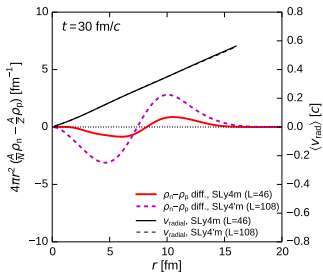


運動量空間の  $n-p$

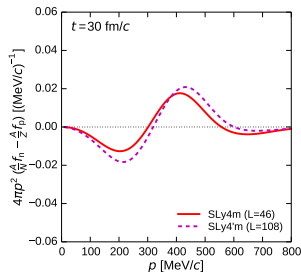


クラスターなし

座標空間の  $n-p$

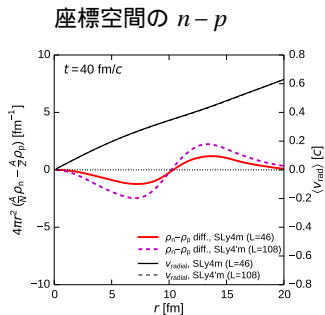


運動量空間の  $n-p$

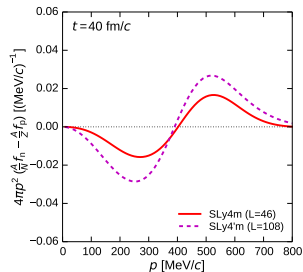




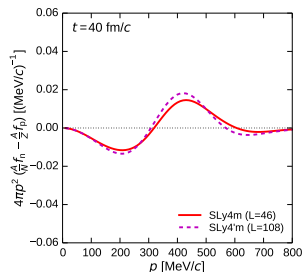
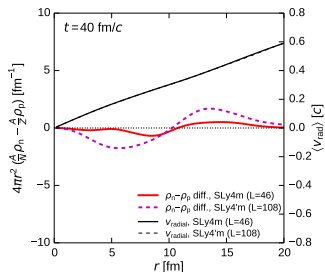
クラスターあり



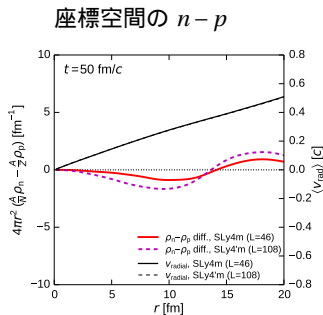
運動量空間の  $n-p$



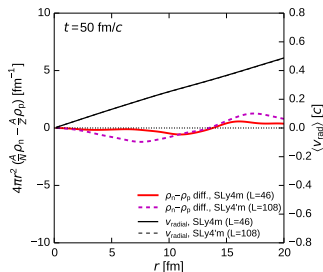
クラスターなし



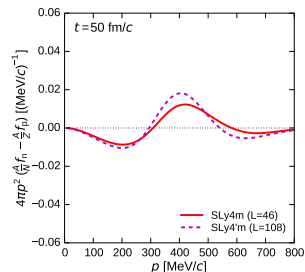
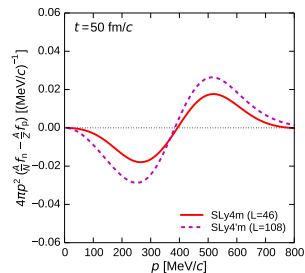
クラスターあり



クラスターなし



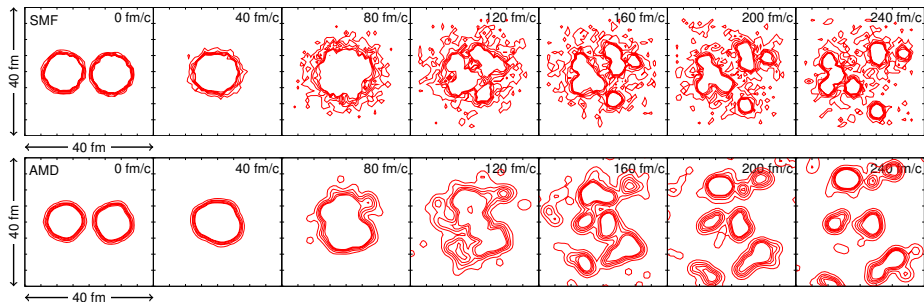
運動量空間の  $n-p$



# 50 MeV/nucleon での AMD と SMF の比較 — 密度の時間発展

Colonna, Ono, Rizzo, PRC82 (2010) 054613.

- SMF = Stochastic Mean Field model
- AMD = Antisymmetrized Molecular Dynamics



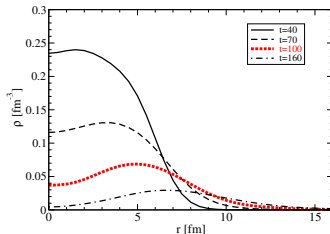
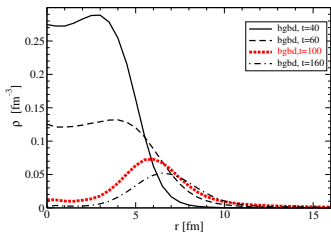
Central Collisions of  $^{112}\text{Sn} + ^{112}\text{Sn}$  at 50 MeV/nucleon

# 50 MeV/nucleon での AMD と SMF の比較 — 集団的膨張

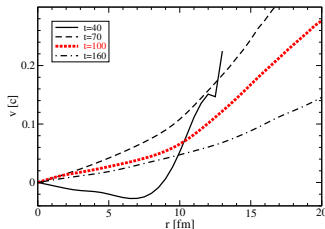
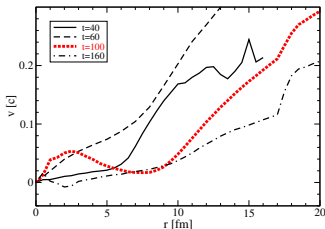
## SMF

## AMD

Density  
distribution  
 $\langle \rho \rangle(r)$



Collective  
momentum  
 $\langle \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{p} \rangle(r)$



$r$  = distance from the center of the system

中性子過剰核の重イオン衝突  $^{132}\text{Sn} + ^{124}\text{Sn}$  ( $E/A = 300$  MeV,  $b \sim 0$ ) において, 圧縮・膨張する系の陽子・中性子のダイナミクスを AMD を用いて調べた.

- 圧縮時に高密度での対称エネルギーを反映して, 中心付近 (および外側) の陽子・中性子比が決まる.
- クラスタ相関を取り入れた計算では, 膨張が単純なようである. 中性子と陽子の差の空間分布と運動量分布が, 単純に関係している.  
⇒ 圧縮時の陽子・中性子比が, 観測される陽子・中性子スペクトルに反映される.

対称エネルギーが硬い ⇔ 高密度部分の  $N/Z$  が下がる

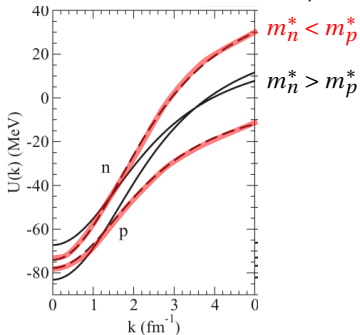
⇔ 高運動量部分の  $N/Z$  が上がる

- クラスタ相関を無視した計算では, 膨張が単純でないため, 圧縮時の陽子・中性子比と, 最終的なスペクトルとの関係は単純でない.

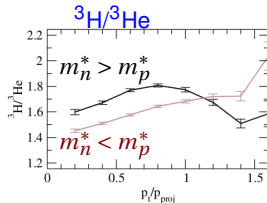
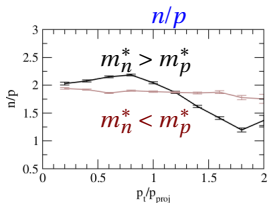
# 平均場の運動量依存性（有効質量）とフローなど

Giordano, Colonna, Di Toro et al., PRC 81 (2010) 044611.

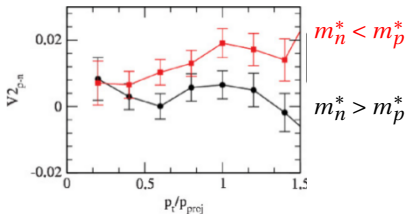
平均場の運動量依存性 ( $\rho_n > \rho_p$ )



Emission of particles at mid-rapidity  $|y| < 0.3$  from central Au + Au collisions at 400 MeV/u.



Elliptic Flow  $V_2(p) - V_2(n)$



中性子と陽子の有効質量  $m_n^*, m_p^*$

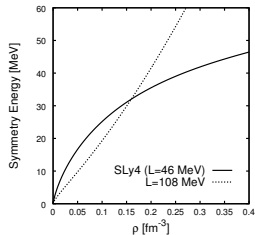
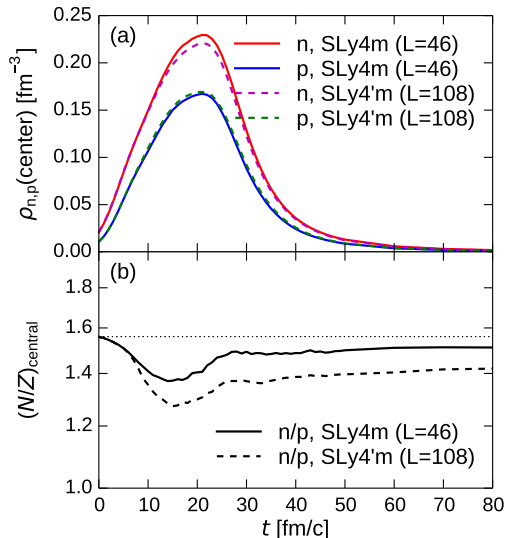
$$\frac{m_\tau^*}{m} = \left(1 + \frac{m}{\hbar^2 p} \frac{\partial U_\tau}{\partial p}\right)^{-1} \text{ at } p = p_{F,\tau}$$

重イオン衝突は平均場の運動量依存性を調べる良い機会でもある。

# 高密度でのアイソスピン効果と $\pi$ 中間子

$^{132}\text{Sn} + ^{124}\text{Sn}$  collisions at 300 MeV/nucleon,  $b < 2$  fm

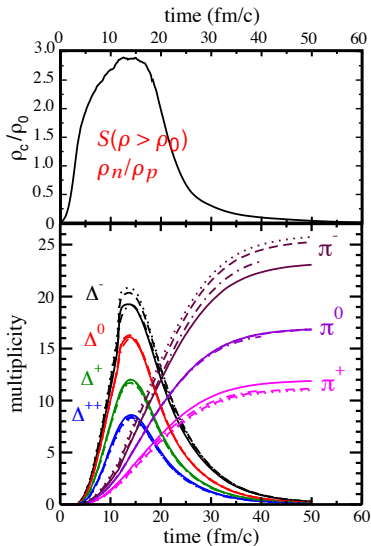
AMD 計算



対称エネルギーの密度依存性により、圧縮時の高密度部分の  $\rho_n/\rho_p$  が異なる。

パイオンをプローブとして、高密度の  $\rho_n/\rho_p$  を測れないか？

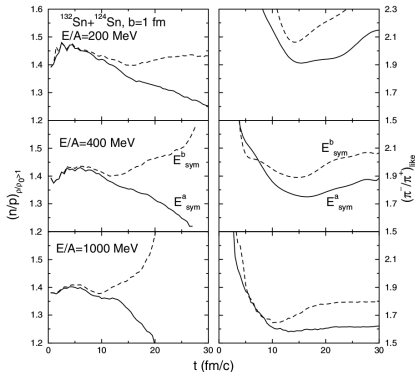
# $\pi$ 生成とアイソスピン効果 — BUU などによる研究



Au + Au central collision at 1 GeV/u

Ferini et al., PRL 97 (2006) 202301.

Bao-An Li, PRL88 (2002) 192701.



$$N + N \leftrightarrow N + \Delta, \quad \Delta \leftrightarrow N + \pi$$

単純には  $\pi^-/\pi^+ \approx (N/Z)^2$  と期待される .



## 一般的なイメージ

$$\text{EOS} \Rightarrow \{\rho_n(t), \rho_p(t), \rho_\Delta(t), \rho_\pi(t)\} \Rightarrow \text{pions}$$

- 核子系の EOS のほか、種々の要素によって結果が異なることがわかっている。
- 何がどう効いて結果に至っているのか（外から見ていると）よくわからないので、結局パイオンから何がわかるのか、何とも言えない。

## 低めのエネルギーに注目した場合のイメージ

$$\begin{aligned} \text{EOS} &\Leftrightarrow \{\rho_n(t), \rho_p(t)\} \\ &\{\rho_n(t), \rho_p(t)\} \Leftrightarrow \text{pions} \end{aligned}$$

- 1 行目と 2 行目を分けて考えてよいのであれば、少しはわかりやすいのではないか。
- 1 行目と 2 行目で、別のアプローチを使ってもよい。

## Coupled equations for $f_N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , $f_\Delta(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , $f_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \frac{\partial h_N}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial h_N[f_N, f_\Delta, f_\pi]}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}} = I_N[f_N, f_\Delta, f_\pi]$$

$$\frac{\partial f_\Delta}{\partial t} + \frac{\partial h_\Delta}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f_\Delta}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial h_\Delta[f_N, f_\Delta, f_\pi]}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_\Delta}{\partial \mathbf{p}} = I_\Delta[f_N, f_\Delta, f_\pi]$$

$$\frac{\partial f_\pi}{\partial t} + \frac{\partial h_\pi}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f_\pi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial h_\pi[f_N, f_\Delta, f_\pi]}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_\pi}{\partial \mathbf{p}} = I_\pi[f_N, f_\Delta, f_\pi]$$

Consider the cases in which the  $\Delta$  and pion productions are rare, and assume

$$I_N[f_N, f_\Delta, f_\pi] = I_N^{\text{el}}[f_N, 0, 0] + \lambda I'_N[f_N, f_\Delta, f_\pi]$$

$$f_N = f_N^{(0)} + \lambda f_N^{(1)} + \dots, \quad f_\Delta = O(\lambda), \quad f_\pi = O(\lambda)$$

Zeroth order equation for  $f_N$

AMD で解く

$$\frac{\partial f_N^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial h_N}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f_N^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial h_N[f_N^{(0)}, 0, 0]}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_N^{(0)}}{\partial \mathbf{p}} = I_N^{\text{el}}[f_N^{(0)}, 0, 0]$$

First order equations for  $f_\Delta$  and  $f_\pi$

与えられた  $f_N^{(0)}$  に対して JAM で解く

$$\frac{\partial f_\Delta}{\partial t} + \frac{\partial h_\Delta}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f_\Delta}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial h_\Delta[f_N^{(0)}, f_\Delta, f_\pi]}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_\Delta}{\partial \mathbf{p}} = I_\Delta[f_N^{(0)}, f_\Delta, f_\pi]$$

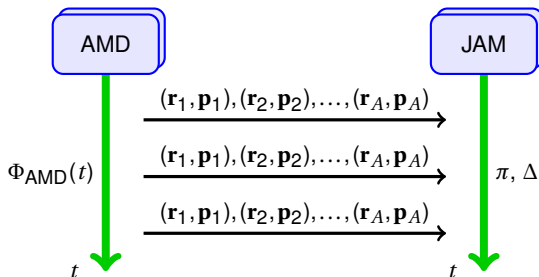
$$\frac{\partial f_\pi}{\partial t} + \frac{\partial h_\pi}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f_\pi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial h_\pi[f_N^{(0)}, f_\Delta, f_\pi]}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_\pi}{\partial \mathbf{p}} = I_\pi[f_N^{(0)}, f_\Delta, f_\pi]$$

# AMD + JAM によるアプローチ

**Assumption:** Pion emission does not influence the time evolution of nucleons, which allows the separation of

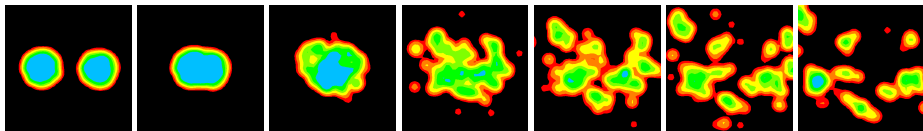
- Dynamics of nucleons, and isospin effects in it.
- Pion production mechanism, and possible isospin effects in it.

**Method:** JAM coupled with AMD



JAM: A Microscopic Transport Code for high energy nuclear collisions  
Y. Nara, N. Otuka, A. Ohnishi, K. Niita, S. Chiba, PRC 61 (2000) 024901.

# Bulk Properties and Correlations



An event of central collision of Xe + Sn at 50 MeV/nucleon (AMD calculation)

Bulk properties and dynamics  
e.g. EOS  $E(\rho)$

↔  
interplay

Correlations  
e.g. clusters and fragments



Isospin dynamics, Symmetry energy

$\rho_n - \rho_p$ ,  $n/p$ ,  $t/{}^3\text{He}, \dots$

## 反対称化

≈ 量子力学的アプローチ — 少なくとも波動関数を考える (c.f. Vlasov 方程式)

フラグメント生成

## 反対称化

≈ 量子力学的アプローチ — 少なくとも波動関数を考える (c.f. Vlasov 方程式)

- 原子核の記述
- 平均場理論との関連
- フェルミ粒子の統計的性質 ( $E^* = aT^2$ )
- 離散的な量子状態
- クラスタ-相関
- 多チャンネルへの分岐
- 非線形性の利用と克服

## フラグメント生成