

実践格子QCD

準備篇

中村純 (なかむらあつし)
nakamura at an-pan.org

サマースクール「クオークから超新星爆発まで」
QCDパート

2014年7月22日（火）～26日（土）

第一章 格子QCDの基礎

-  Introduction
-  Notation
-  Gauge Transformation
-  Monte Carlo
-  Actions
-  Some Basic Quantities
-  Fermions
-  Hadron Propagators

1 Introduction

格子場は何がうれしいのか？

- 📌 場の量子論のカットオフを与える

- 📌 強結合展開ができる

 - 💡 朝永先生やPolyakovも気がついていた？

- 📌 ゲージ変換が自然に定義できる

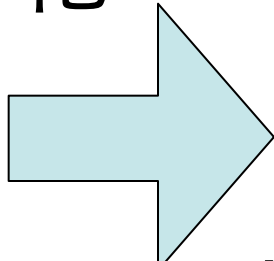
- 📌 ゲージ固定がいらない

- 📌 数値計算ができる

 - 💡 (Asymptotic freeな理論なら) 連続理論に自然につながる

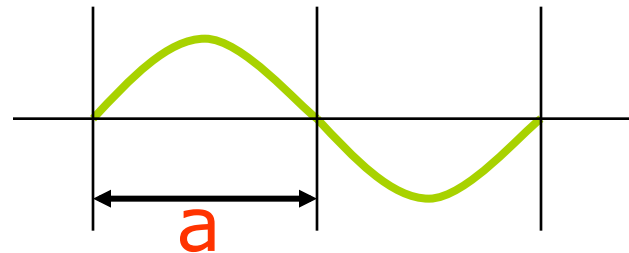
格子場

📌 格子化



紫外切断 (Cut-Off)

📌 場の量子論=量子化規則+Cut-Off



$$p_{\max} = \frac{\pi}{a}$$

量子化規則：正準量子化, 経路積分、確率過程量子化 etc.

📍 格子場登場以前

🔴 摂動によらないカットオフは無い？

🔴 もしそうなら場の量子論は摂動的にしか定義できない？

📍 Wilsonの格子ゲージ理論の登場で
それは杞憂だと分かった

Wilson, “Confinement of quarks”, Phys.Rev. D10 (1974)



クォーク束縛状態を研究する道具としての 格子QCD

📍 Parisi 1982頃

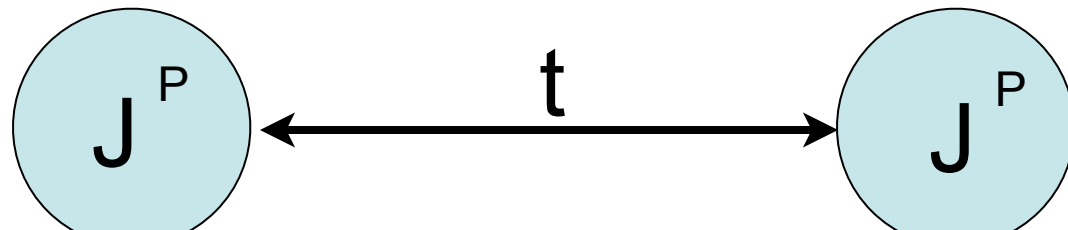
- 📍 「格子ゲージ理論の中にはクォークも入っている。どうしてそれも計算機で計算してはいけないのか？」 (Creutz, “Confinement and the critical dimensionality of space-time”, Phys. Rev. Lett. 43 (1979))
- 📍 「アメリカに行って聞いたが、出来ないという漠然とした答え」
- 📍 大規模線形方程式のStochasticな解法を開発していた

📌 「相対論的束縛状態」は非常に難しい

📌 格子QCDではそれを計算できる！

🔴 ただし、クォークモデルのように「束縛状態」を作っているわけではない

🔴 ターゲットのハドロンと同じ量子数を持ったオペレータを作ってその（虚時間での）減衰を見る



2 Notation

-  Introduction
-  **Notation**
-  Gauge Transformation
-  Monte Carlo
-  Actions
-  Some Basic Quantities
-  Fermions
-  Hadron Propagators

格子QCD

📌 ユークリッド化（虚時間）経路積分

$$Z = \int D U D \bar{\psi} D \psi e^{-(S_G + \bar{\psi} \Delta \psi)} = \int D U \det \Delta e^{-S_G}$$

– U : グルーオン場、 ψ : クォーク場

📌 ゲージ場（グルーオン場）の量子論的揺らぎ

➡ モンテカルロ計算

📌 フェルミオン（クォーク）のプロパゲータ

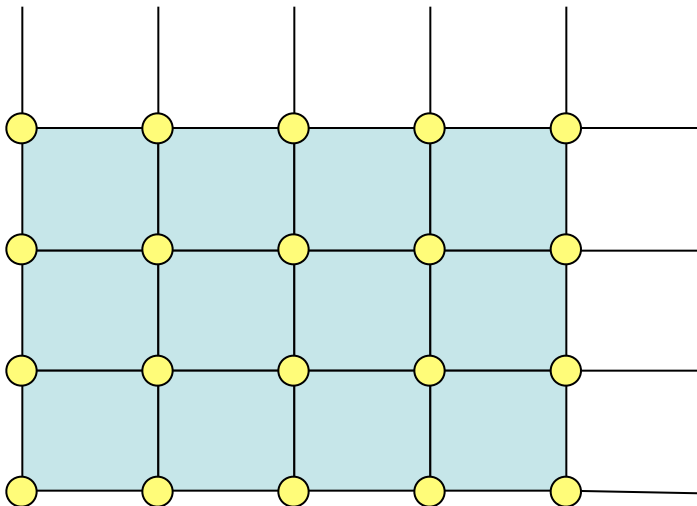
➡ 線形計算（フェルミオン行列 Δ の逆行列）

$$Z = \int D U D \bar{\psi} D \psi e^{-(S_G + \bar{\psi} \Delta \psi)} = \int D U \det \Delta e^{-S_G}$$

$$U_{\mu}(x) = e^{i A_{\mu}(x)} \quad \mu = x, y, z, t \text{ or } 1, 2, 3, 4$$

$$x = (x, y, z, t)$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

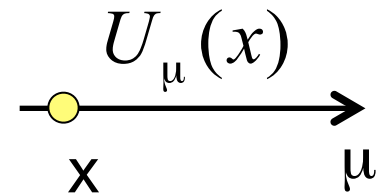


$$x_1 = 1, 2, \dots, N_x$$

$$x_2 = 1, 2, \dots, N_y$$

$$x_3 = 1, 2, \dots, N_z$$

$$x_4 = 1, 2, \dots, N_t$$



リンク変数

連続理論

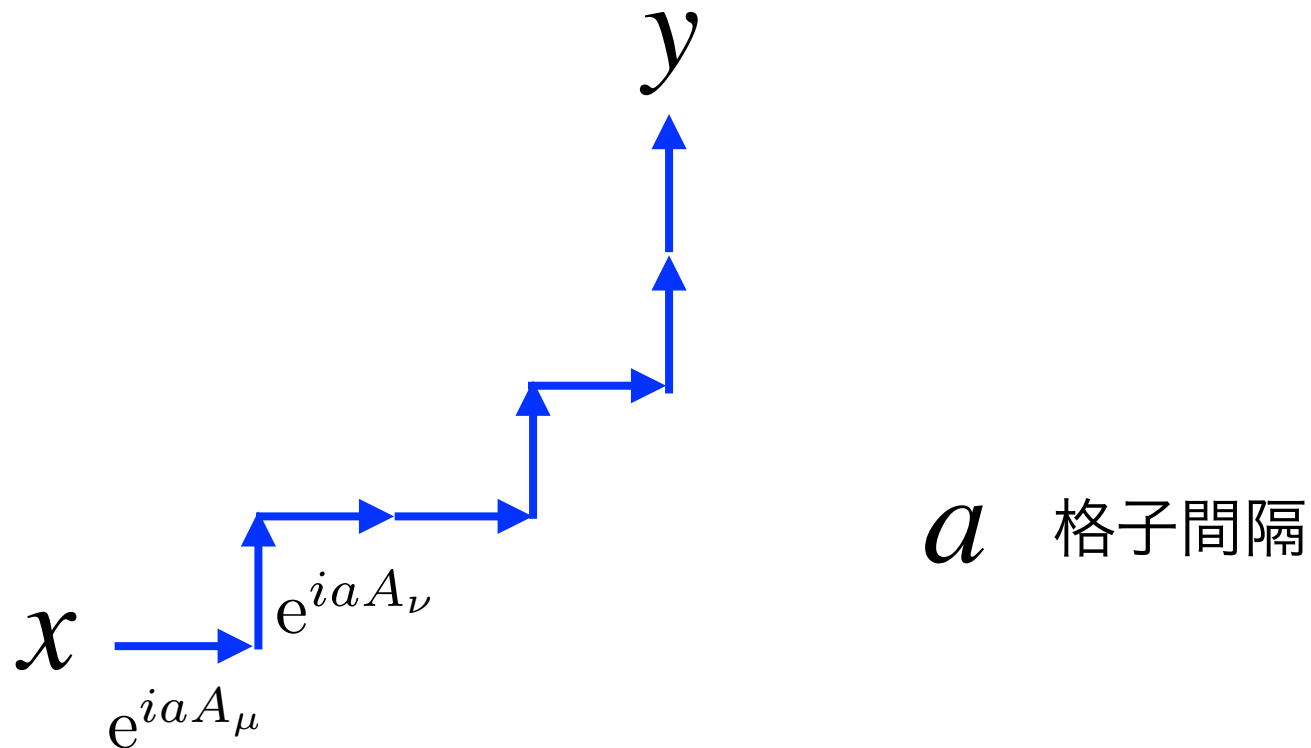
$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \quad \text{ゲージ不変} \quad \bigcirc$$

$$\bar{\psi}(x)\psi(y) \quad \text{ゲージ不変} \quad \times$$

$(x \neq y)$

$$\bar{\psi}(x) \boxed{e^{i \int_x^y A_\mu dx_\mu}} \psi(y) \quad \text{ゲージ不変} \quad \bigcirc$$

$$e^{i \int_x^y A_\mu dx_\mu}$$



$$U_\mu(x)U_\nu(x') \cdots U_\nu(y)$$

$$UU \cdots U \rightarrow P e^i \int_x^y A_\mu dx_\mu$$

微分を差分にするとみんな当たり前になる

$$ma = F$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{dv}{dt} = F \\ v = \frac{dx}{dt} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{時間を格子に}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{v(t + \Delta) - v(t)}{\Delta} = \frac{1}{m} F \\ \frac{x(t + \Delta) - x(t)}{\Delta} = v \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{\quad} \left\{ \begin{array}{l} v(t + \Delta) = v(t) + \frac{1}{m} F \Delta \\ x(t + \Delta) = x(t) + v(t) \Delta \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t \text{ での } x, v \text{ を与えると } t + \Delta \\ \text{での } x, v \text{ が決まる} \\ \text{初期条件が必要} \end{array}$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi$$

$$A_1 = cA_x \quad A_2 = cA_y \quad A_3 = cA_z \quad A_4 = i c \phi$$

$$cB_x = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}$$

$$iE_x = \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}$$

$$cB_y = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}$$

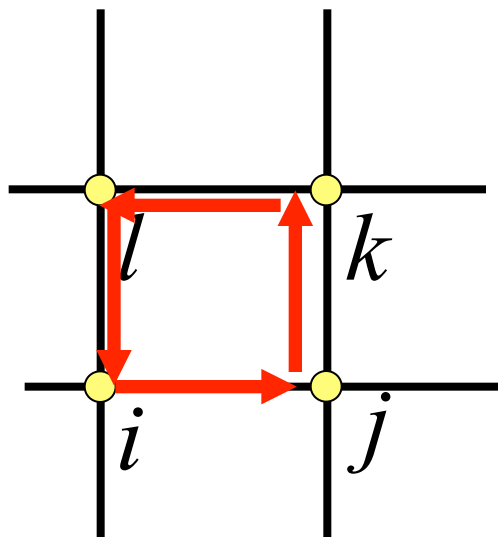
$$iE_y = \frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4}$$

$$cB_z = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

$$iE_z = \frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4}$$

みな $\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$ という形

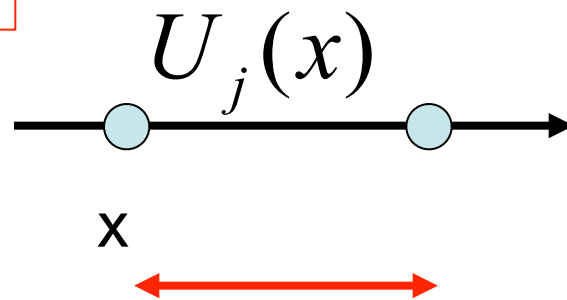
ウィルソンの格子ゲージ理論



$$U_j(x) = e^{iaeA_j(x)}$$

ただし向きが
逆の時は

$$U_j(x)^* = e^{-iaeA_j(x)}$$

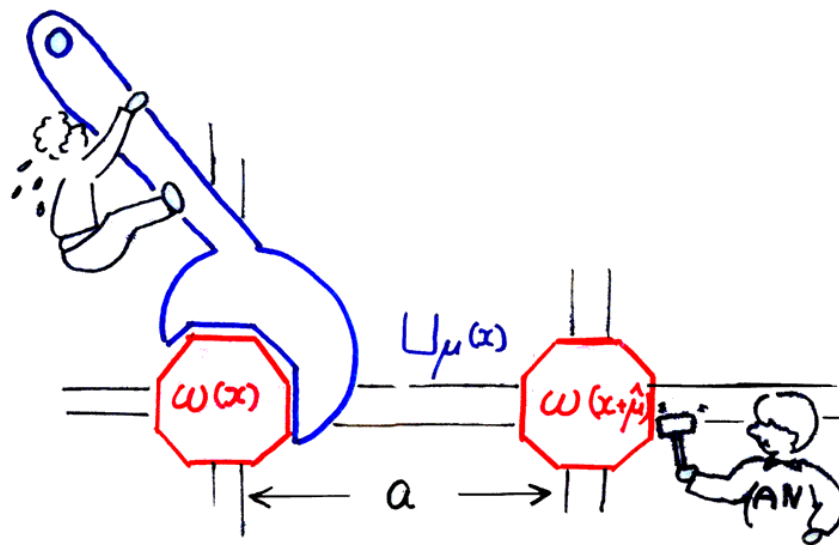


$$\begin{aligned} & e^{iaeA_\mu(x)} e^{iaeA_\nu(x+\vec{\mu}a)} e^{-iaeA_\mu(x+\vec{\nu}a)} e^{-iaeA_\nu(x)} \\ &= \exp\left(ia^2 e \left\{ \frac{A_\nu(x+\vec{\mu}a) - A_\nu(x)}{a} - \frac{A_\mu(x+\vec{\nu}a) - A_\mu(x)}{a} \right\}\right) \\ &\simeq \exp\left(ia^2 e \left\{ \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right\}\right) \end{aligned}$$

3 Gauge Transformation

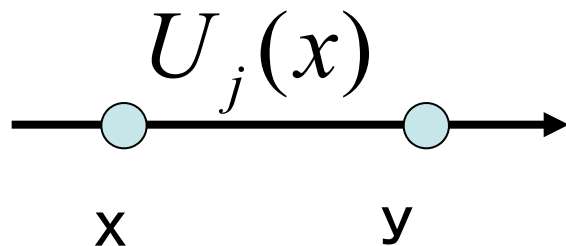
-  Introduction
-  Notation
-  Gauge Transformation
-  Monte Carlo
-  Actions
-  Some Basic Quantities
-  Fermions
-  Hadron Propagators

格子上のゲージ変換



(格子上の)ゲージ変換

U(1)の場合



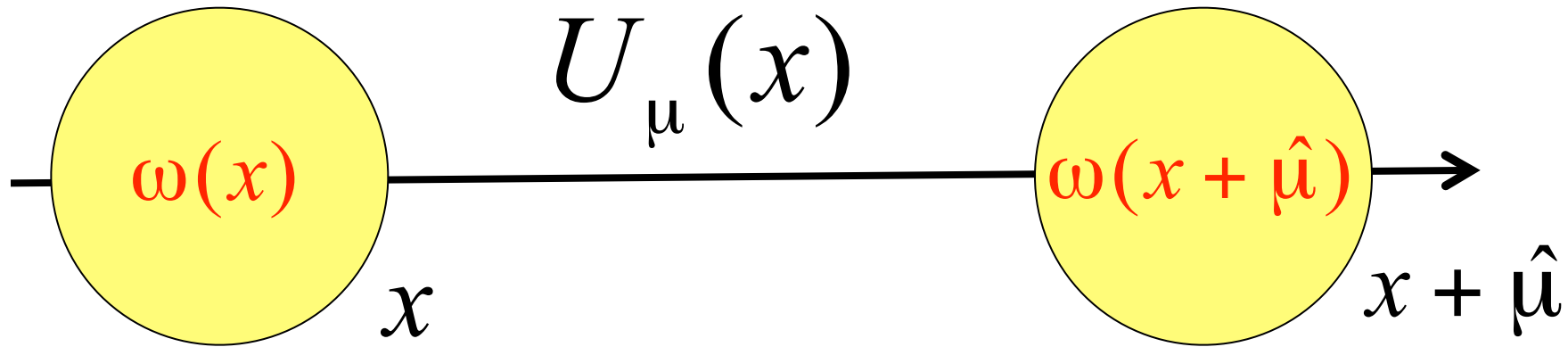
$$U_j(x) \rightarrow \omega(x)^\dagger U_j(x) \omega(y)$$

$$\text{ただし } \omega(x) = e^{ie\theta(x)}$$

$$e^{iaeA_j(x)} \rightarrow e^{-ie\theta(x)} e^{iaeA_j(x)} e^{ie\theta(y)}$$

$$A_j(x) \rightarrow A_j(x) + \frac{\theta(y) - \theta(x)}{a} = A_j(x) + \frac{\partial\theta(x)}{\partial x_j}$$

格子上的ゲージ変換 (一般)



$$U_\mu(x) \rightarrow \omega(x)^\dagger U_\mu(x) \omega(x + \hat{\mu})$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) \omega(x)$$

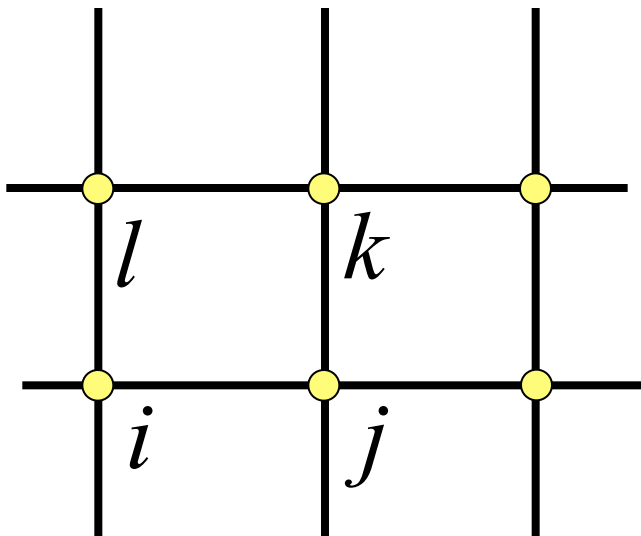
$$\psi(x) \rightarrow \omega(x) \psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x) U_\mu(x) \psi(x + \hat{\mu})$$

不変

$$\begin{aligned}
U_{ij}U_{jk}U_{kl}U_{li} &= U_{ij}U_{jk}U_{lk}^{\dagger}U_{il}^{\dagger} \\
&\rightarrow (\omega_i^{\dagger}U_{ij}\omega_j)(\omega_j^{\dagger}U_{jk}\omega_k)(\omega_l^{\dagger}U_{lk}\omega_k)^{\dagger}(\omega_i^{\dagger}U_{il}\omega_l)^{\dagger} \\
&= (\omega_i^{\dagger}U_{ij}\omega_j)(\omega_j^{\dagger}U_{jk}\omega_k)(\omega_k^{\dagger}U_{lk}^{\dagger}\omega_l)(\omega_l^{\dagger}U_{il}^{\dagger}\omega_i) \\
&= \omega_i^{\dagger}U_{ij}U_{jk}U_{lk}^{\dagger}U_{il}^{\dagger}\omega_i
\end{aligned}$$



$$\text{Tr } U_{ij}U_{jk}U_{kl}U_{li}$$

不變

ゲージ変換 (連続極限)

$$\omega(x)^\dagger U_\mu(x) \omega(x + \hat{\mu})$$

📌 U(1) ケース

$$\omega(x) = e^{i\chi(x)} \quad U_\mu(x) = e^{iaA_\mu(x)}$$

$$U_\mu(x) = e^{iaA_\mu(x)} \longrightarrow e^{-i\chi(x)} e^{iaA_\mu(x)} e^{i\chi(x+\hat{\mu})}$$

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\longrightarrow A_\mu(x) + \frac{\chi(x + \hat{\mu}) - \chi(x)}{a} \\ &= A_\mu(x) + \partial_\mu \chi + O(a) \end{aligned}$$

📌 SU(N) ケース

$$e^{iaA_\mu(x)} \longrightarrow \omega(x)^\dagger e^{iaA_\mu(x)} \omega(x + \hat{\mu})$$

$$(1 + iaA_\mu(x) + \dots) \longrightarrow \omega(x)^\dagger (1 + iaA_\mu(x) + \dots) (\omega(x) + a\partial_\mu \omega(x) + \dots)$$

$$A_\mu(x) \longrightarrow \omega(x)^\dagger A_\mu(x) \omega(x) - i\omega(x)^\dagger \partial_\mu \omega(x) + O(a)$$

4 Monte Carlo

-  Introduction
-  Notation
-  Gauge Transformation
-  Monte Carlo
-  Actions
-  Some Basic Quantities
-  Fermions
-  Hadron Propagators

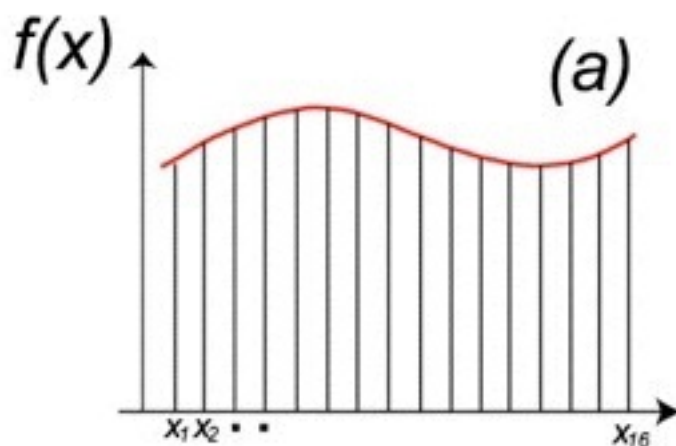
非常に多次元の積分

$$\int DU = \int \prod_{\mu=1,2,3,4} \prod_{x_1=1}^{N_x} \prod_{x_2=1}^{N_y} \prod_{x_3=1}^{N_z} \prod_{x_4=1}^{N_t} dU_{\mu}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

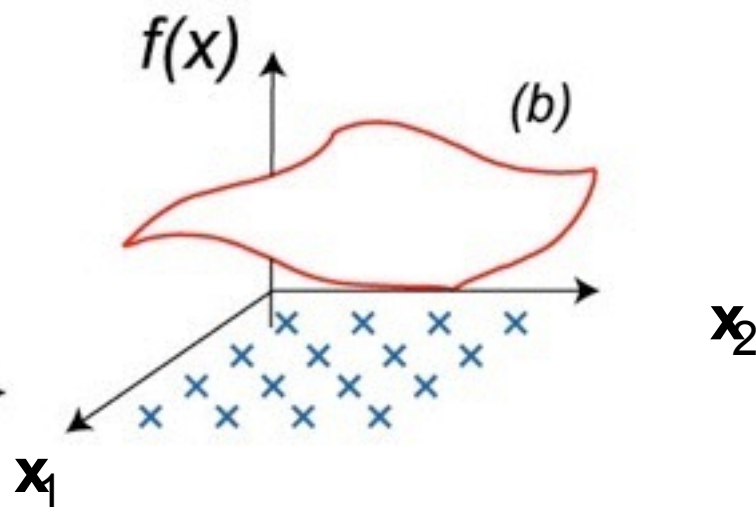


多次元空間での積分とモンテカルロ

$$I = \int f(x) dx_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_n$$



1次元



2次元

数値積分の誤差

誤差：
$$\frac{1}{\text{各方向の点の数}} = \frac{1}{N^{1/n}}$$

N : 点の（総）数

計算時間は N に比例

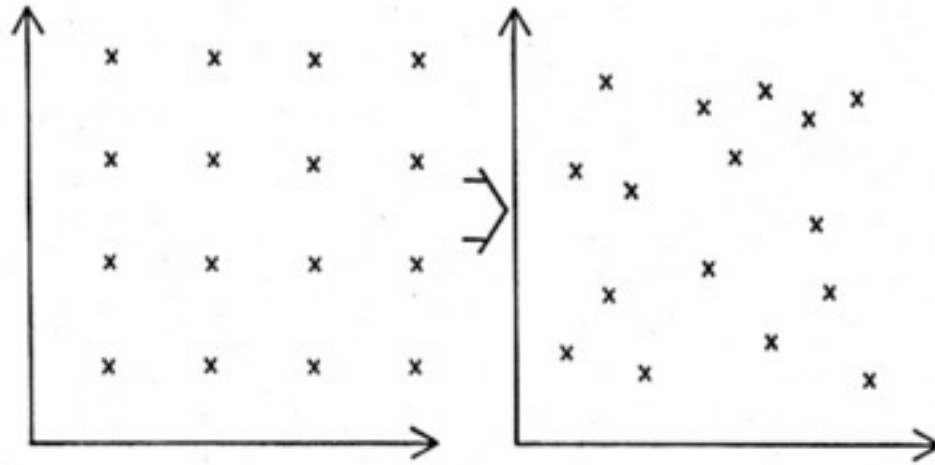
$N=1000$ でも $n=10$ の時 $N^{1/n} = 1.99526$

格子QCDでは $n = 4N_x N_y N_z N_t \times 8$

通常の数値積分は非現実的



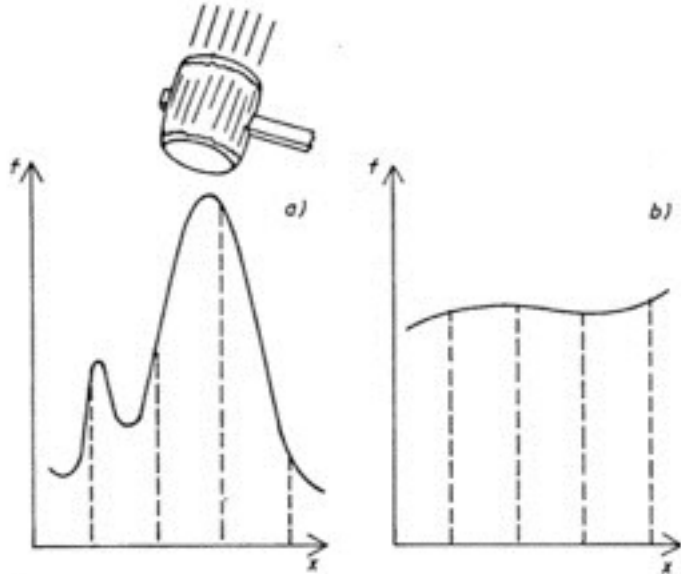
モンテカルロ法での誤差



誤差： $\frac{1}{\sqrt{N}}$

次元 n によらない！

Importance Sampling



被積分関数が平らな
ら数値積分は容易

$$\frac{dx}{dt} \simeq \frac{1}{f} \text{ を満たすような}$$

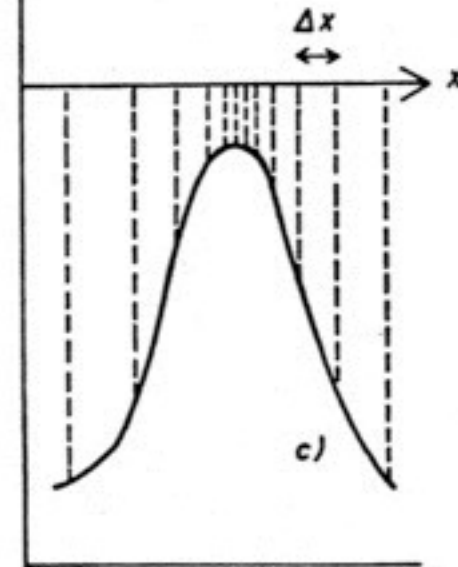
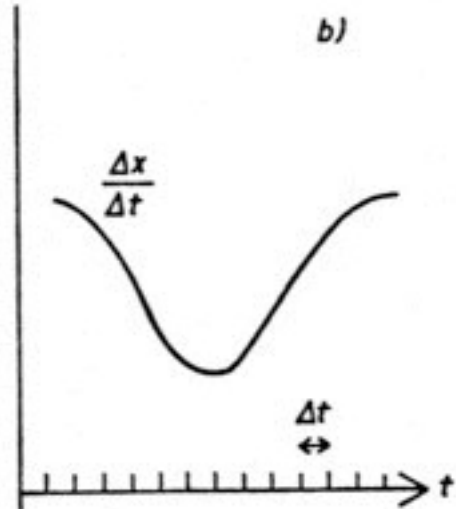
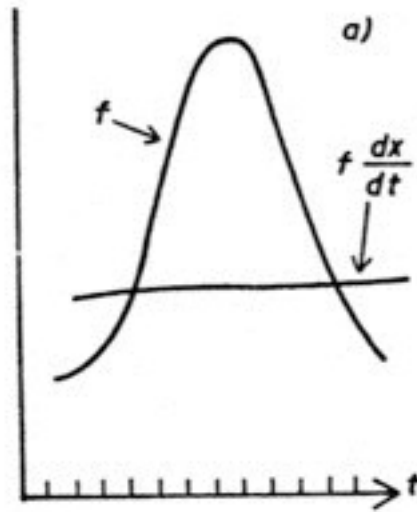
変数変換 $x \Rightarrow t$

$$I = \int f(x) dx = \int f(x(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

.....

ほぼ平ら

Importance Sampling (2)



$$I = \int f(x(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

Metropolis アルゴリズム

📍 Importance Sampling + Random Sampling

⇒ 多次元でも通用するモンテカルロ法

📍 そんなことができる？！

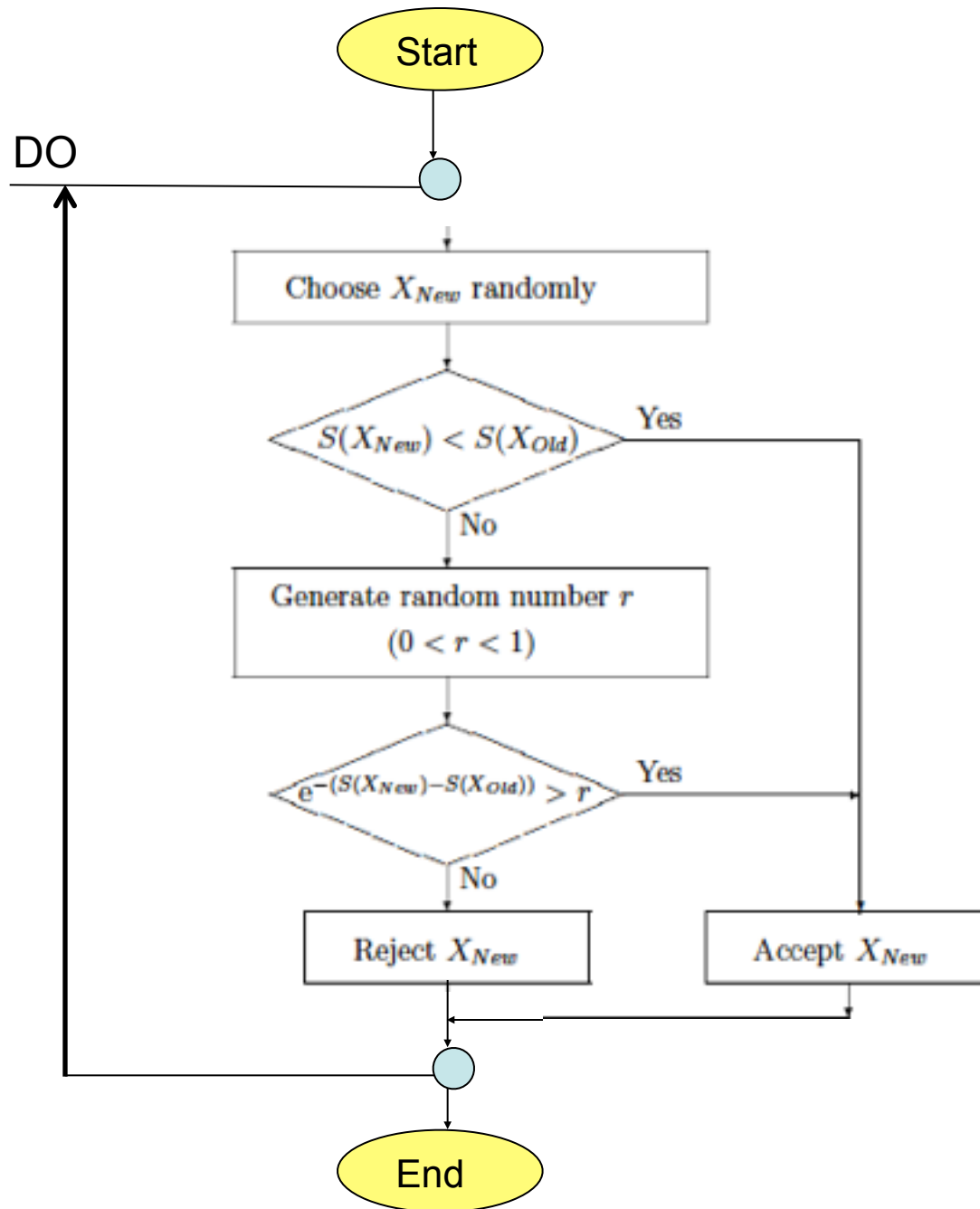
📍 N.Metropolis et al.

J. Chem. Phys. 21, 1087 (1953)

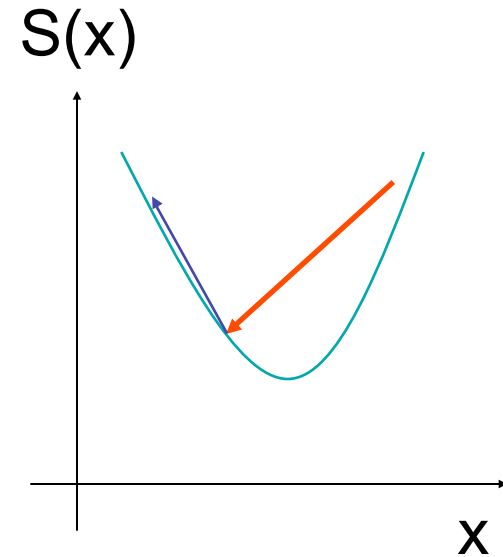
📍 米国化学会のWebで公開されています

📍 http://jcp.aip.org/resource/1/jcpsa6/v21/i6/p1087_s1?bypassSSO=1

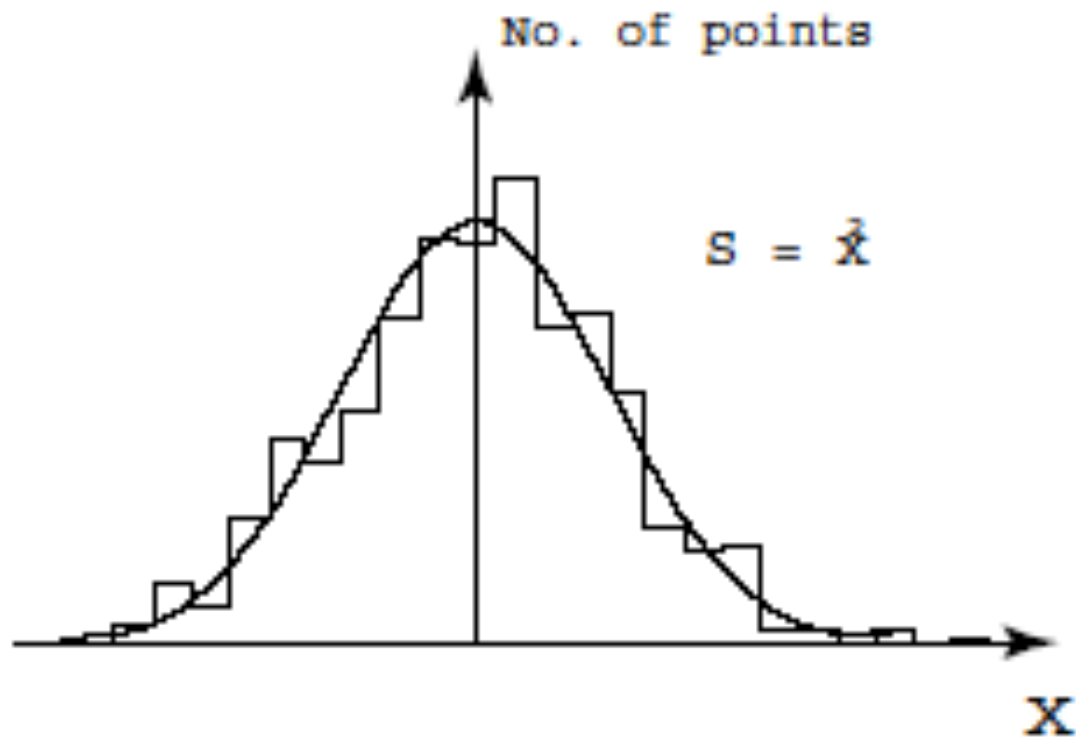




$$I = \int e^{-S(x)} dx$$



$$I = \int e^{-S(x)} dx = \int e^{-x^2} dx$$



Metropolis Algorithm

ν_s : 全アンサンブルのうち状態 s であるものの数

$\nu_s \propto \exp(-E_s/kT)$ を証明する

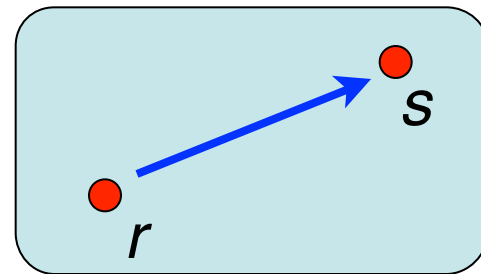
P_{rs} 状態が r から s に移動するアприオリな確率

$P_{rs} = P_{sr}$ (となるようにアルゴリズムを作る)

Ergodicであると仮定 (どの状態も実現される)



Nicholas Metropolis
Νικόλαος Μητρόπουλος
1915 – 1999



歴史的論文だ！

$E_r > E_s$ の場合

r から s に移動する状態の数 : $\nu_r P_{rs}$

s から r に移動する状態の数 : $\nu_s P_{sr}$

$\times \exp(-(E_r - E_s)/kT)$



平衡状態では、 $s \leftrightarrow r$, $r \leftrightarrow s$ は等しい

$$\nu_r P_{rs} = \nu_s P_{sr} \times \exp(-(E_r - E_s)/kT)$$

$$P_{rs} = P_{sr} \text{ なので}$$

$$\frac{\nu_r}{\exp(-E_r/kT)} = \frac{\nu_s}{\exp(-E_s/kT)}$$

左辺は s によらない、右辺は r によらない。

つまり constant

それで
終わり！

$$\nu_s = C \exp(-E_s/kT)$$

$E_r < E_s$ の場合も同様 証明終わり



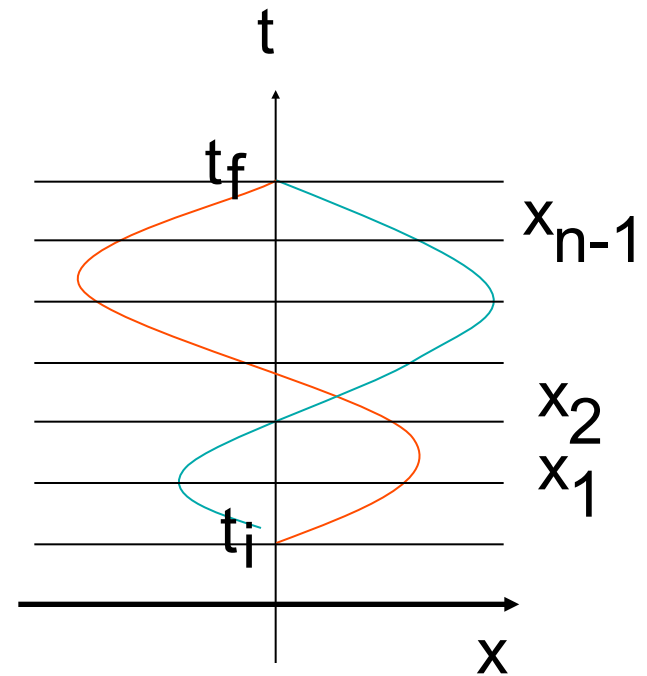
1 次元量子力学

M. Creutz and B. Freedman, Ann. Phys. 132 427,

$$Z = \int Dx e^{\frac{i}{\hbar} \int dt L},$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x),$$

$$Dx = \lim_{n \rightarrow \infty} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$



$$x_0 \equiv x(t_i), x_1 \equiv x(t_1), x_2 \equiv x(t_2), \dots, x_{n-1} \equiv x(t_{n-1}), x_n \equiv x(t_f)$$

ユークリッド化（虚時間化）

$$t \rightarrow -i\tau$$

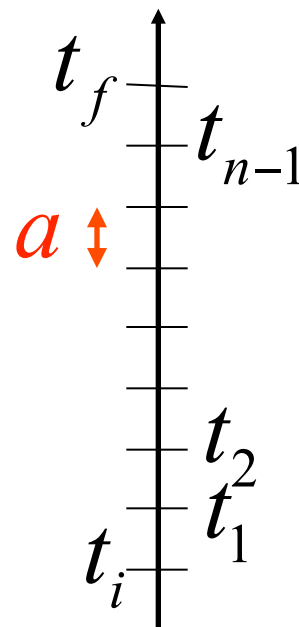
$$L \rightarrow -\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x) = -H$$

$$\begin{aligned} Z &\rightarrow \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} \int (-i d\tau)(-H)} \\ &= \int \mathcal{D}x e^{-\frac{1}{\hbar} \int d\tau H} = \int \mathcal{D}x e^{-\frac{1}{\hbar} S} \end{aligned}$$

離散化

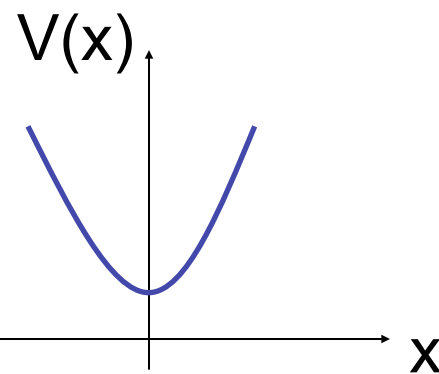
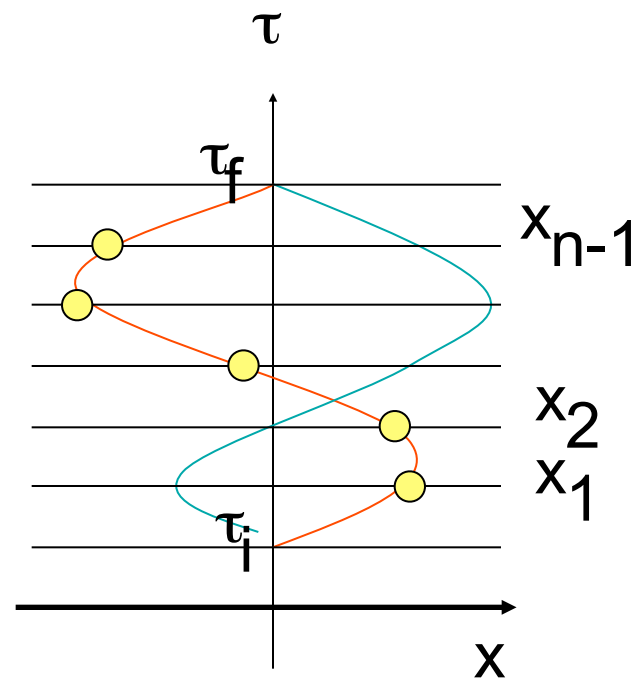
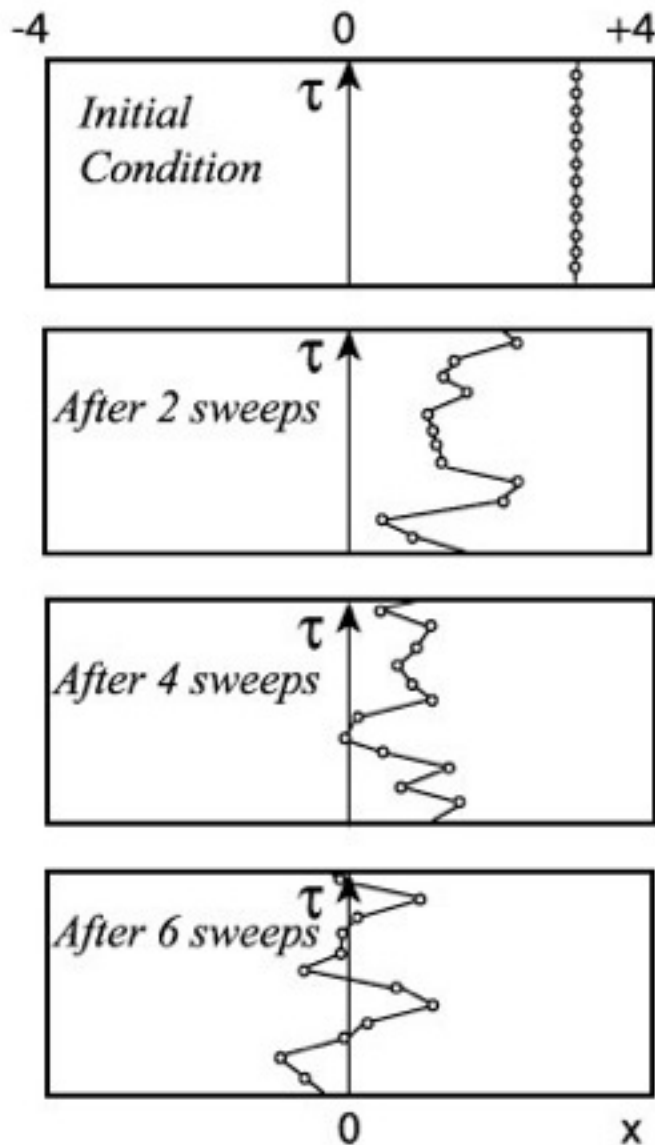
$$Z = \int dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} e^{-S/\hbar}$$

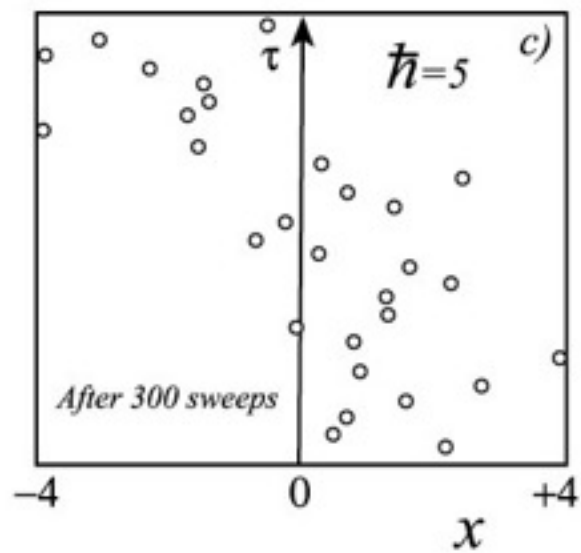
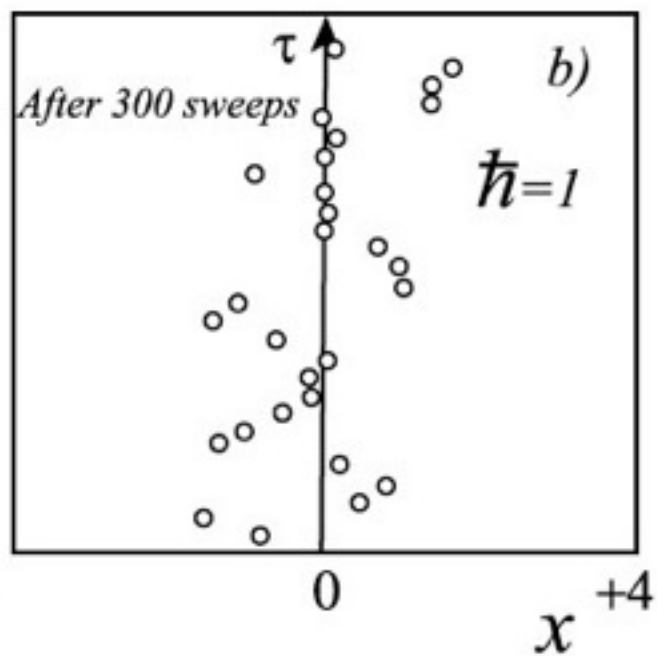
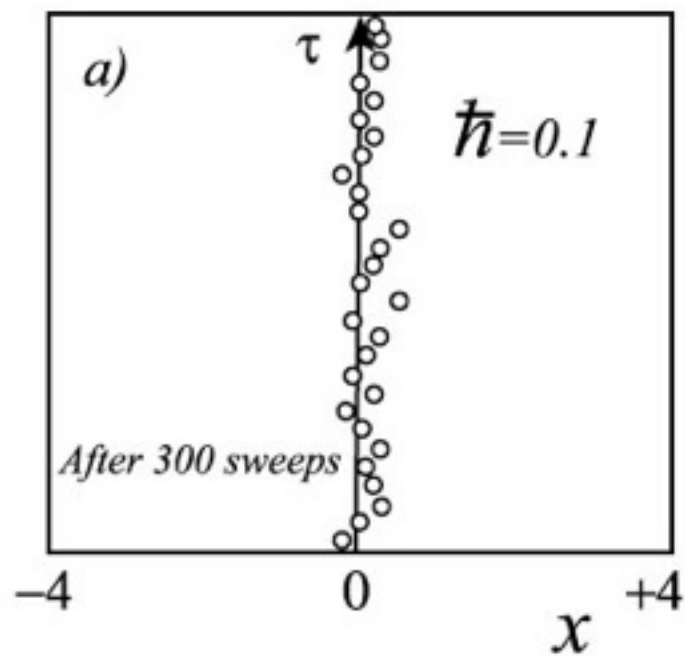
$$S = \sum_j a \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{a} \right)^2 + V(x_j) \right]$$



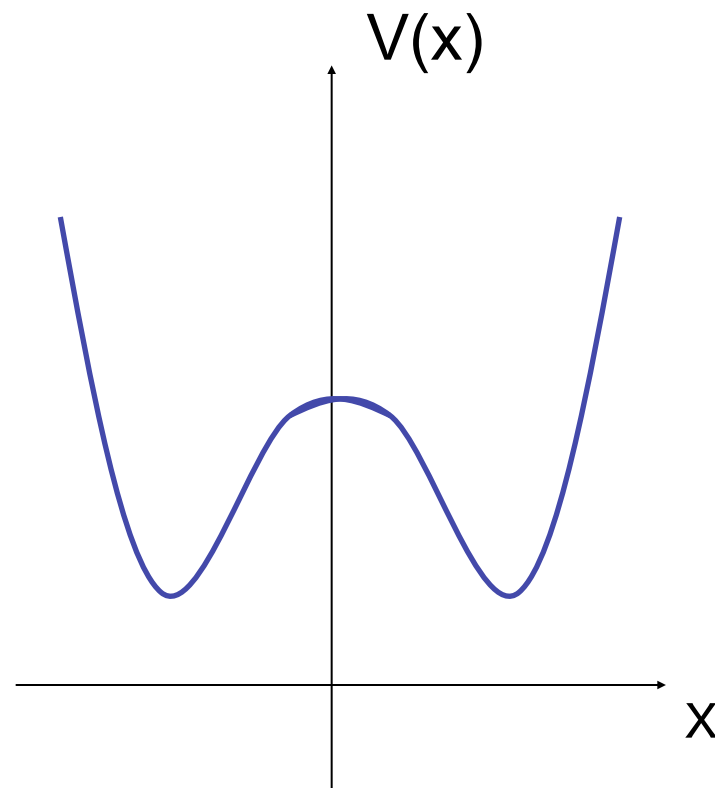
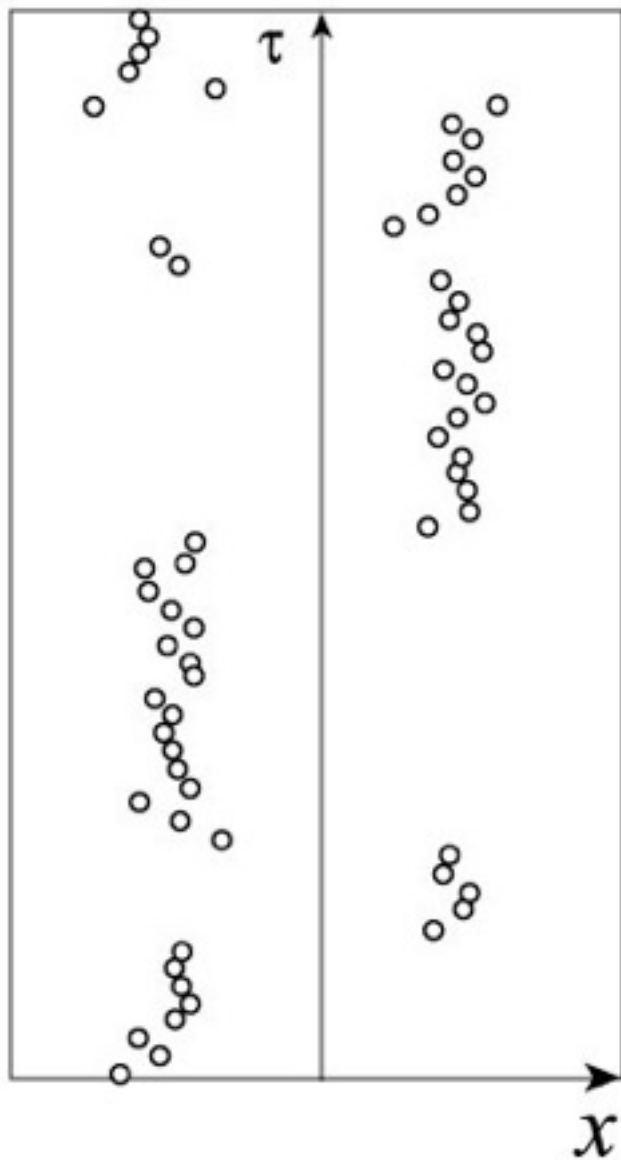
$$x_0 \equiv x(t_i), x_1 \equiv x(t_1), x_2 \equiv x(t_2), \dots, x_{n-1} \equiv x(t_{n-1}), x_n \equiv x(t_f)$$

シミュレーション結果



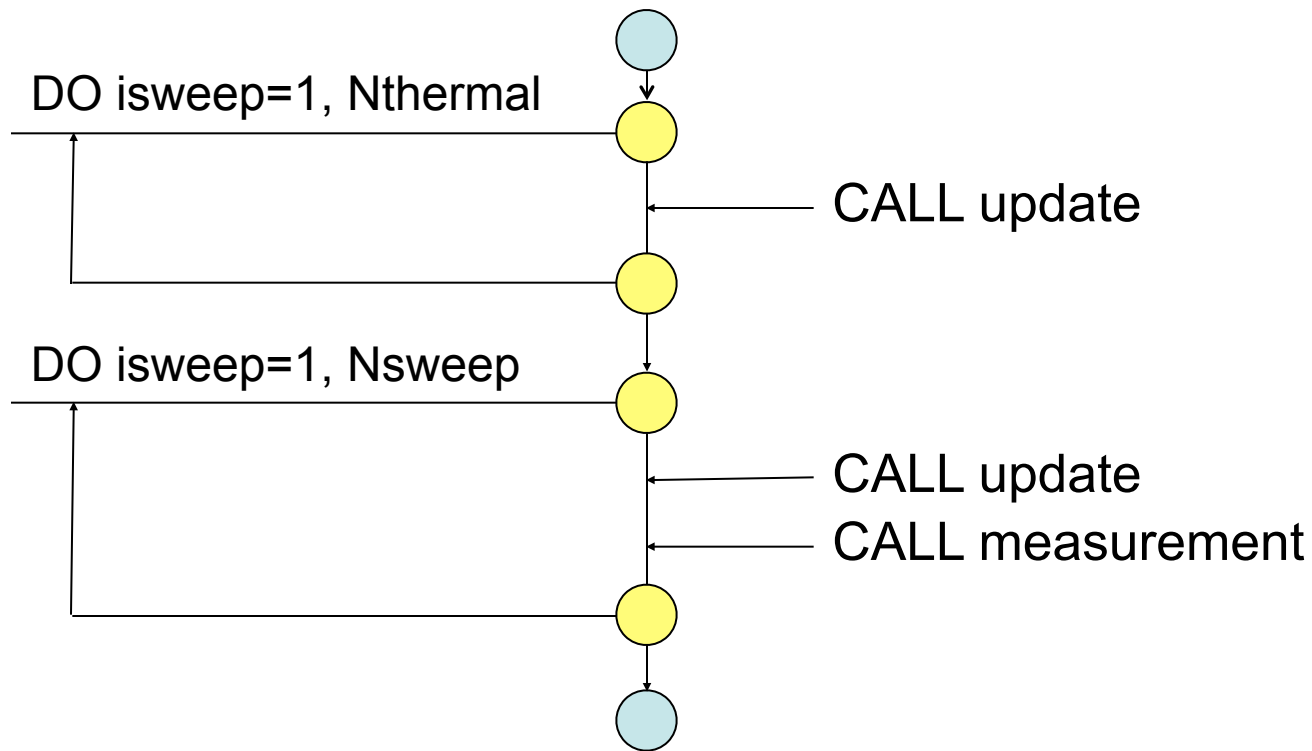


非調和振動子



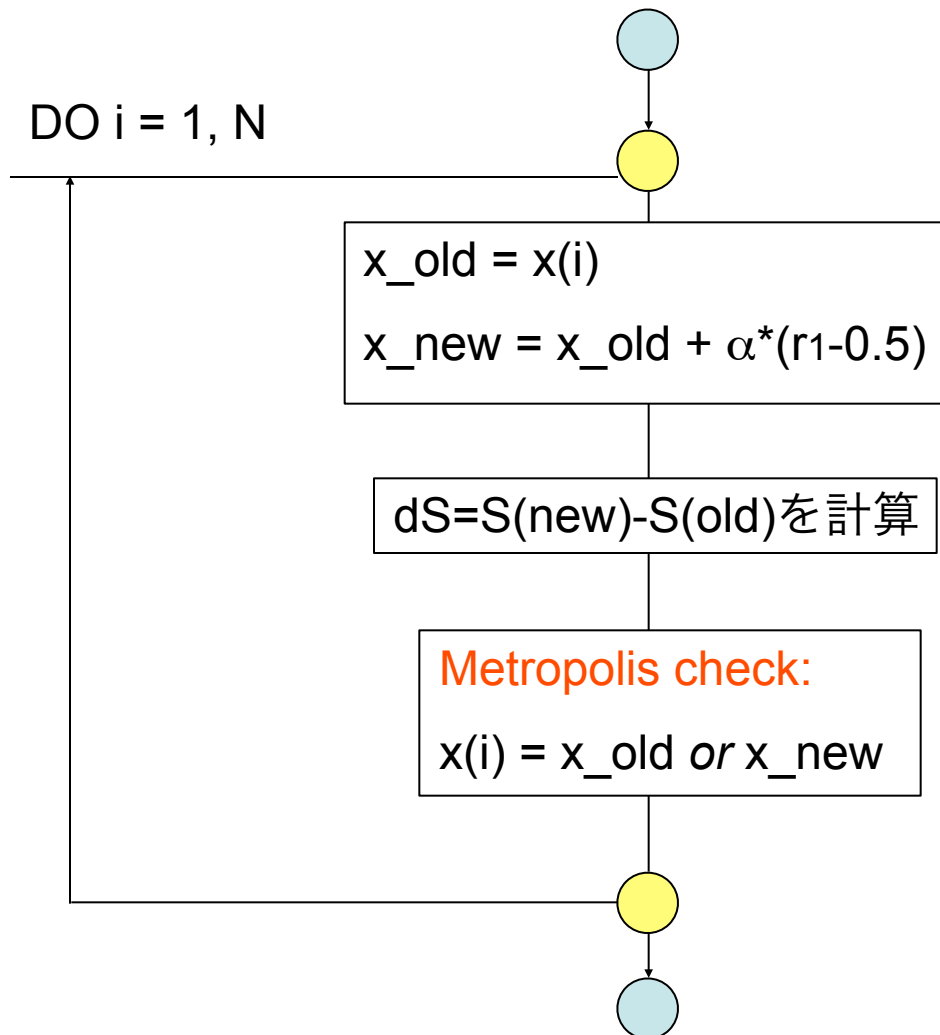
フローチャート

(1) MAIN



フローチャート

(2) update



境界条件の処理

👤 周期的境界条件： $x(N+1) = x(1), x(0) = x(N)$

👤 (反周期的： $x(N+1) = -x(1), x(0) = -x(N)$)

```
DO i = 1, N
  ia = i + 1
  ib = i - 1
  IF( i==N ) ia = 1
  IF( i==1 ) ib = N
  xa = x(ia)
  xb = x(ib)
  ...
```

```
REAL, DIMENSION(0:N+1) :: x
x(0) = x(N)
x(N+1) = x(1)
DO i = 1, N
  xa = x(i+1)
  xb = x(i-1)
  ...
```

境界条件の処理 (2)

```
INTEGER, DIMENSION(N,2) :: inn
```

```
DO i = 1, N
```

```
  xa = x(inn(i,1))
```

```
  xb = x(inn(i,2))
```

```
  ...
```

```
SUBROUTINE MakeTable
```

```
DO i = 1, N
```

```
  ia = i + 1; ib = i - 1
```

```
  IF( i==N ) ia = 1
```

```
  IF( i==1 ) ib = N
```

```
  inn(i,1) = ia
```

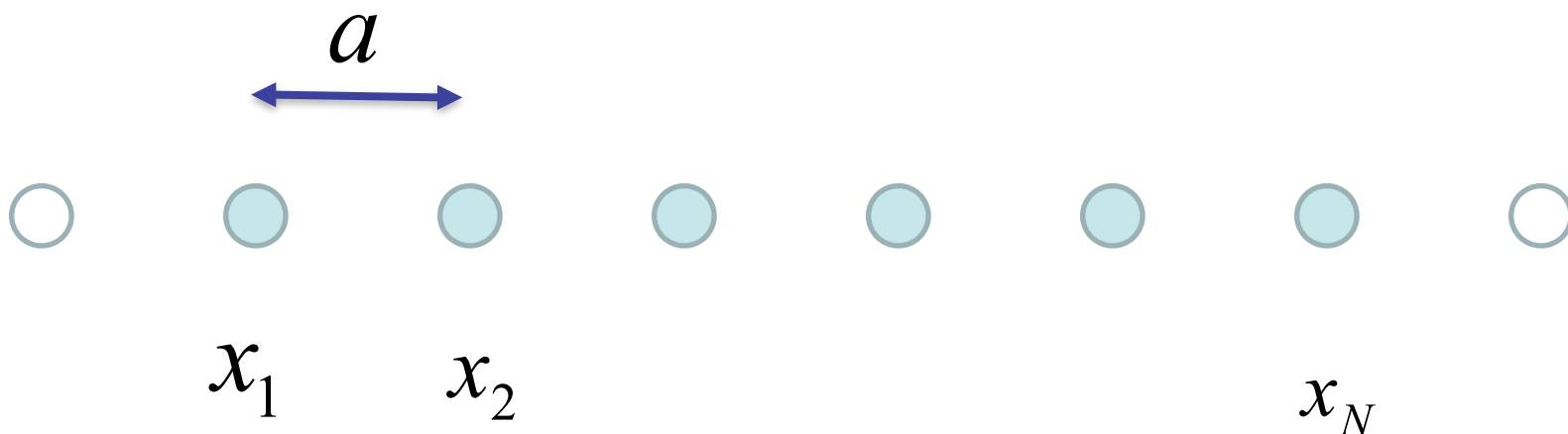
```
  inn(i,2) = ib
```

```
ENDDO
```

```
RETURN
```

```
END
```

境界：固定、自由、周期、反周期



$$f(x_{N+1}) = \pm f(x_1)$$

+: 周期

$$f(x_0) = \pm f(x_N)$$

-: 反周期

あるいは $f(x_i + aN) = \pm f(x_i)$

(反)周期边界条件

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum e^{ipx} \tilde{f}(p)$$

$$f(x + aN) = \frac{1}{N} \sum e^{ip(x+aN)} \tilde{f}(p) = \pm f(x)$$

$$e^{ipaN} = \pm 1$$

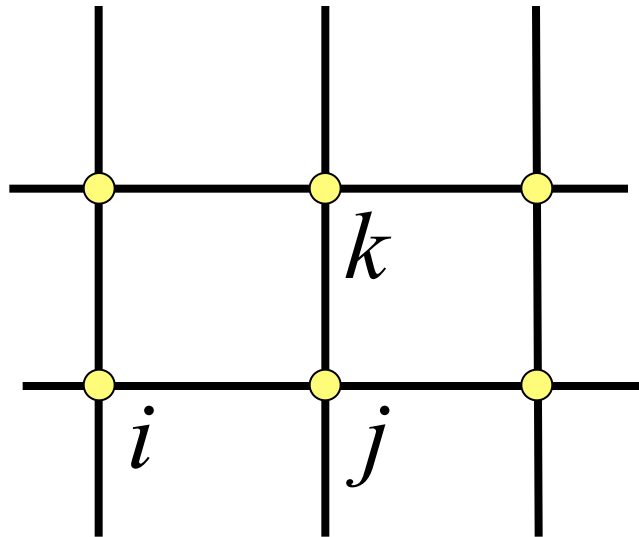
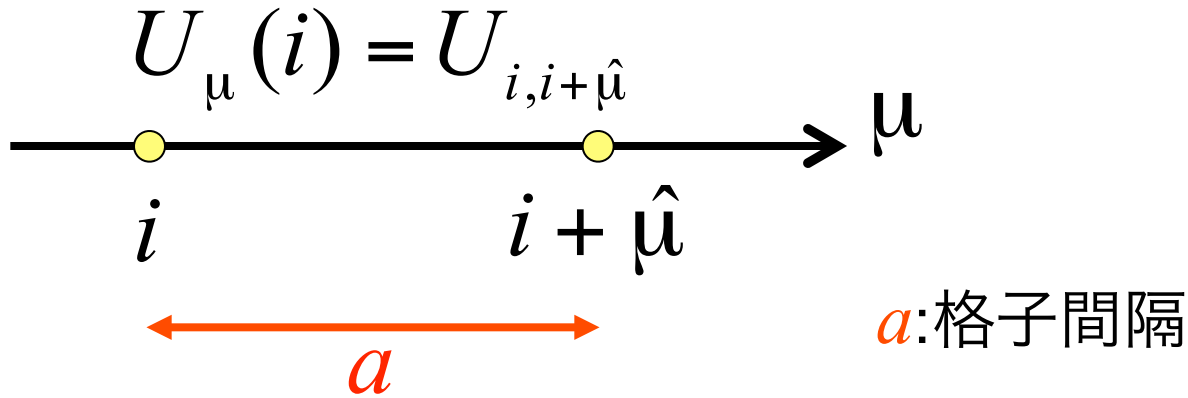
$$paN = 2\pi k \quad (\text{周期}) \quad \rightarrow \quad p = \frac{2\pi k}{aN}$$

$$paN = (2k + 1)\pi \quad (\text{反周期}) \quad \rightarrow \quad p = \frac{(2k + 1)\pi}{aN}$$

5 Actions

-  Introduction
-  Notation
-  Gauge Transformation
-  Monte Carlo
-  **Actions**
-  Some Basic Quantities
-  Fermions
-  Hadron Propagators

格子QCDのラグランジアン (準備)



$$U_{i,j} U_{j,k}$$

$$\bar{\psi}_i U_{i,j} \psi_j$$

$$U_{j,i} = U_{i,j}^{\dagger}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$U^\dagger = {}^t U^*$$

$$UU^\dagger = I \quad \det UU^\dagger = \det U (\det U)^* \\ \det U = 1$$

$$U = e^{iA}$$

$$A^\dagger = A,$$

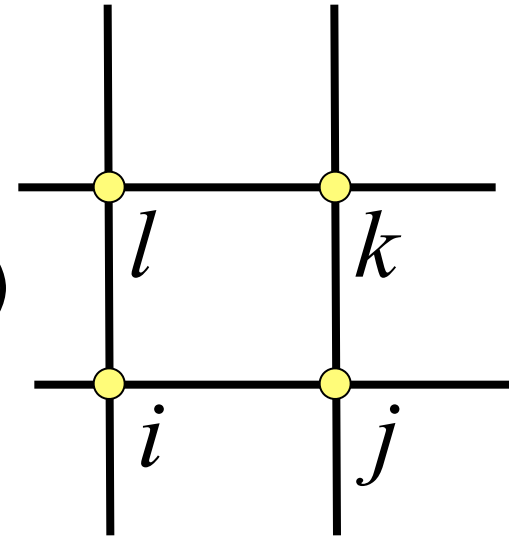
$$\det U = e^{\text{Tr} \log U} = e^{i \text{Tr} A} = 1$$

格子QCDのラグランジアン

📌 K.G.Wilson

📍 Phys. Rev. D10, 2445 (1974)

📍 Erice Lecture Note 1977



$$S = S_G + S_F$$

$$S_G = \beta \sum_{\text{plaquette}} \left\{ 1 - \frac{1}{N_c} \text{Tr}(U_{ij} U_{jk} U_{kl} U_{li}) \right\}$$

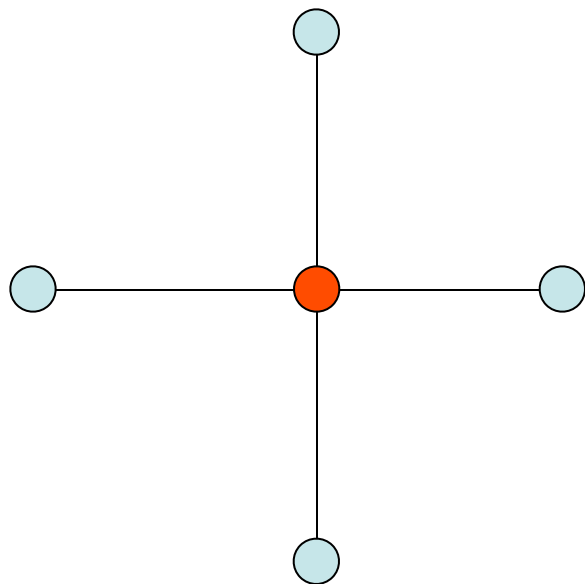
$$\beta \equiv \frac{2N_c}{g^2} \quad U_{i,j} \in SU(N_c)$$

問題：サイズ $N_x N_y N_z N_t$ の
格子にプラケットはいくつ
あるか？



スピン型相互作用とゲージ相互作用

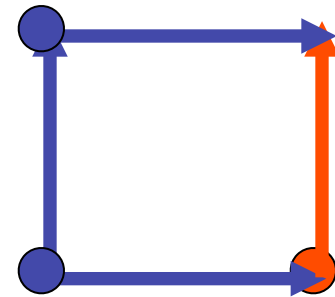
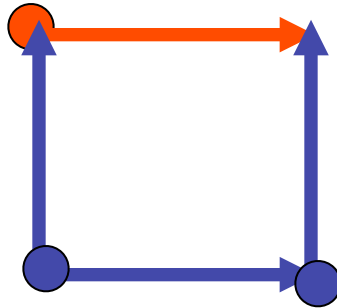
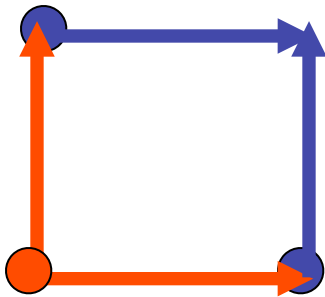
スピン型



$$\sum_i \left(\frac{d\phi(x_1, x_2, x_3)}{dx_i} \right)^2$$

というタイプの相互作用から
現れる

ゲージ型



ループ型のため、斜め横の点に属する
ものとも相互作用。
並列化の時に注意を要する

フェルミオン（クォーク）作用

$$S_F = \sum_{i,j} \bar{\psi}_i \Delta(i,j) \psi_j$$

$$\Delta(i,j) = I - \kappa \sum_{\mu=1}^4 \left\{ (1 - \gamma_{\mu}) U_{i,j} \delta_{i+\hat{\mu},j} + (1 + \gamma_{\mu}) U_{i,j} \delta_{i-\hat{\mu},j} \right\}$$

$$\Delta_{\alpha\beta}^{ab}(i,j) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} \delta_{ij} - \kappa \sum_{\mu=1}^4 \left\{ (1 - \gamma_{\mu})_{\alpha\beta} U_{i,j}^{ab} \delta_{i+\hat{\mu},j} \right. \\ \left. + (1 + \gamma_{\mu})_{\alpha\beta} U_{i,j}^{ab} \delta_{i-\hat{\mu},j} \right\}$$

κ : hopping parameter

(古典) 連続極限

$$U_{\mu}(n) = e^{igaA_{\mu}(na)}$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{a^3}{2\kappa}} \psi(na)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} S_G = \frac{1}{2} \int d^4x \text{Tr} \{ F_{\mu\nu}^2 \}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} S_F = - \int d^4x \left\{ m \bar{\psi}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} (\partial_{\mu} + igA_{\mu}(x)) \psi(x) \right\}$$

ウォーミングアップ

U(1)の場合

$$\begin{aligned}P_{\mu\nu}(x) &\equiv U_{\mu}(x)U_{\nu}(x+\hat{\mu})U_{\mu}^{\dagger}(x+\hat{\nu})U_{\nu}^{\dagger}(x) \\&= e^{iagA_{\mu}(x)}e^{iagA_{\nu}(x+\hat{\mu})}e^{-iagA_{\mu}(x+\hat{\nu})}e^{-iagA_{\nu}(x)} \\&= e^{ia^2g\left(\frac{A_{\nu}(x+\hat{\mu})-A_{\nu}(x)}{a}-\frac{A_{\mu}(x+\hat{\nu})-A_{\mu}(x)}{a}\right)} \\&= e^{ia^2gF_{\mu\nu}(x)} = 1 + ia^2gF_{\mu\nu} - \frac{1}{2}a^4g^2F_{\mu\nu}^2 + \dots \\ \sum_{Plaquette} P_{\mu\nu}(x) &= \sum_x \left(1 - \frac{1}{2}a^4g^2F_{\mu\nu}^2 + \dots\right)\end{aligned}$$

必要な関係式

$$e^X e^Y = e^F$$

$$F = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] \\ + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \dots$$

$$f(x + \hat{\mu}) = f(x) + a \partial_{\mu} f(x) + O(a^2)$$

$$\kappa = \frac{1}{8 + 2ma} \quad \psi_n = \sqrt{\frac{a^3}{2\kappa}} \psi(na)$$

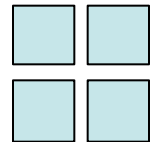
作用はユニークではない

📍 古典連続極限(naïve classical limit)がQCD作用になる

📍 ゲージ不変な $Tr U_{ij} U_{jk} U_{kl} \dots U_{xi}$, $\bar{\psi} \dots \psi$ はみなOK

📍 $O(a)$ の高次項の効果を減少するもの：Improved action

📍 よく使われるもの



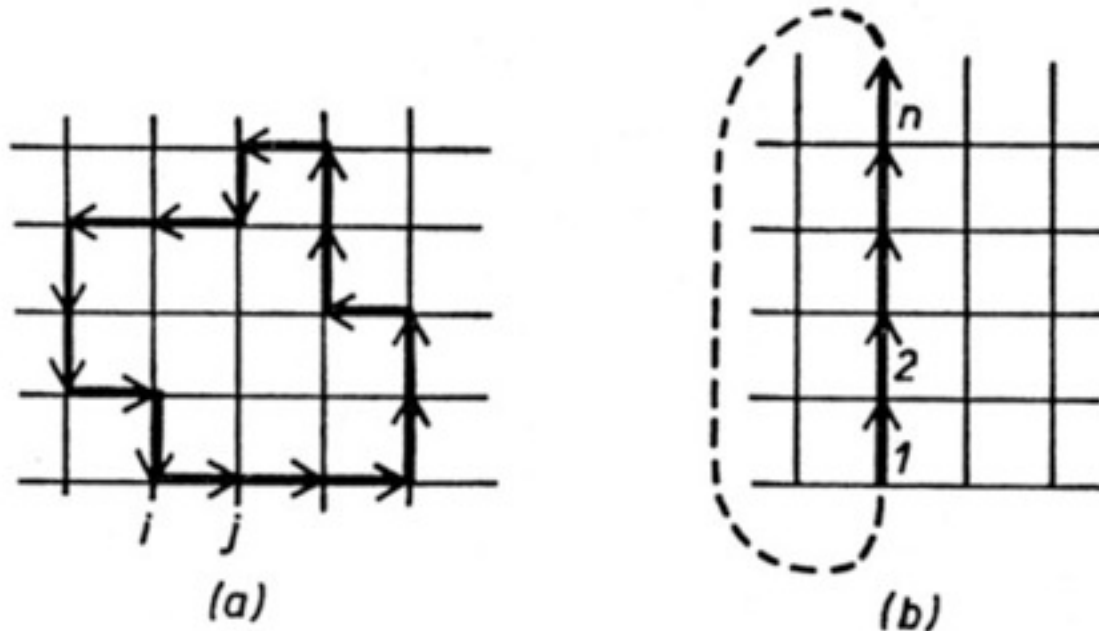
📍 ゲージ：Iwasaki 作用、Symanzik作用、(DBW2作用)

$$\beta (C_0 \square + C_1 \square\square)$$

6 Some Basic Quantities

-  Introduction
-  Notation
-  Gauge Transformation
-  Monte Carlo
-  Actions
-  **Some Basic Quantities**
-  Fermions
-  Hadron Propagators

Wilson Loop & Polyakov Line



$$W = \frac{1}{N_c} \text{Tr}(U_{ij} U_{jk} \cdots U_{li})$$

$$L = \frac{1}{N_c} \text{Tr}(U_{12} U_{23} \cdots U_{n-1,n})$$

ゲージ場のexternal source $j_\mu = g\delta^3(x_\mu - x_\mu(t))$

⇒ 系のエネルギーの増加 $i\int d^4x j_\mu A_\mu = ig\int dx_\mu A_\mu$

$$\begin{aligned} e^{-S_G} &\longrightarrow e^{-ig\int dx_\mu A_\mu - S_G} \\ &= e^{igaA_n} e^{igaA_{n-1}} \dots e^{igaA_1} e^{-S_G} \\ &= We^{-SG} \text{ or } Le^{-SG} \end{aligned}$$

$$\frac{e^{-(F+\Delta F)}}{e^{-F}} = \frac{\int dU e^{-S_G} W}{Z} = \langle W \rangle$$

$$\langle \text{Tr}(\begin{array}{c} \text{T} \\ \text{L} \end{array}) \rangle = e^{-TV(L)}$$

Polyakov Line

📌 Polyakov line: クォークラインが 1 本ある
ときのエネルギー増加

$$\langle L \rangle = e^{-\Delta F}$$

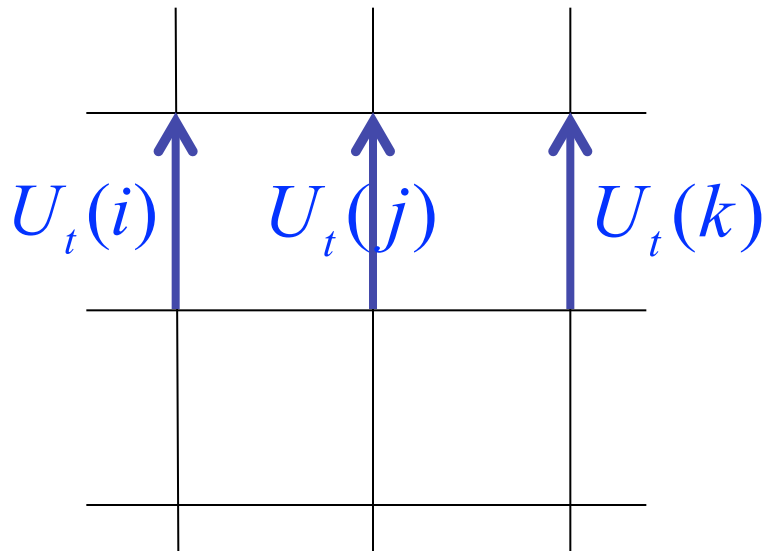
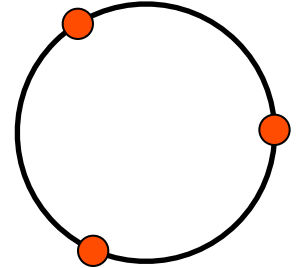
Confinement $\Delta F = \infty$

⋮

➡ $\langle L \rangle = 0$

Z3対称性

📍 SU(3)の要素のうち、 $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$ は他と可換



$$U_t(i), U_t(j), \dots, U_t(k), \\ \rightarrow z U_t(i), z U_t(j), \dots, z U_t(k)$$

$$z \in Z_3$$

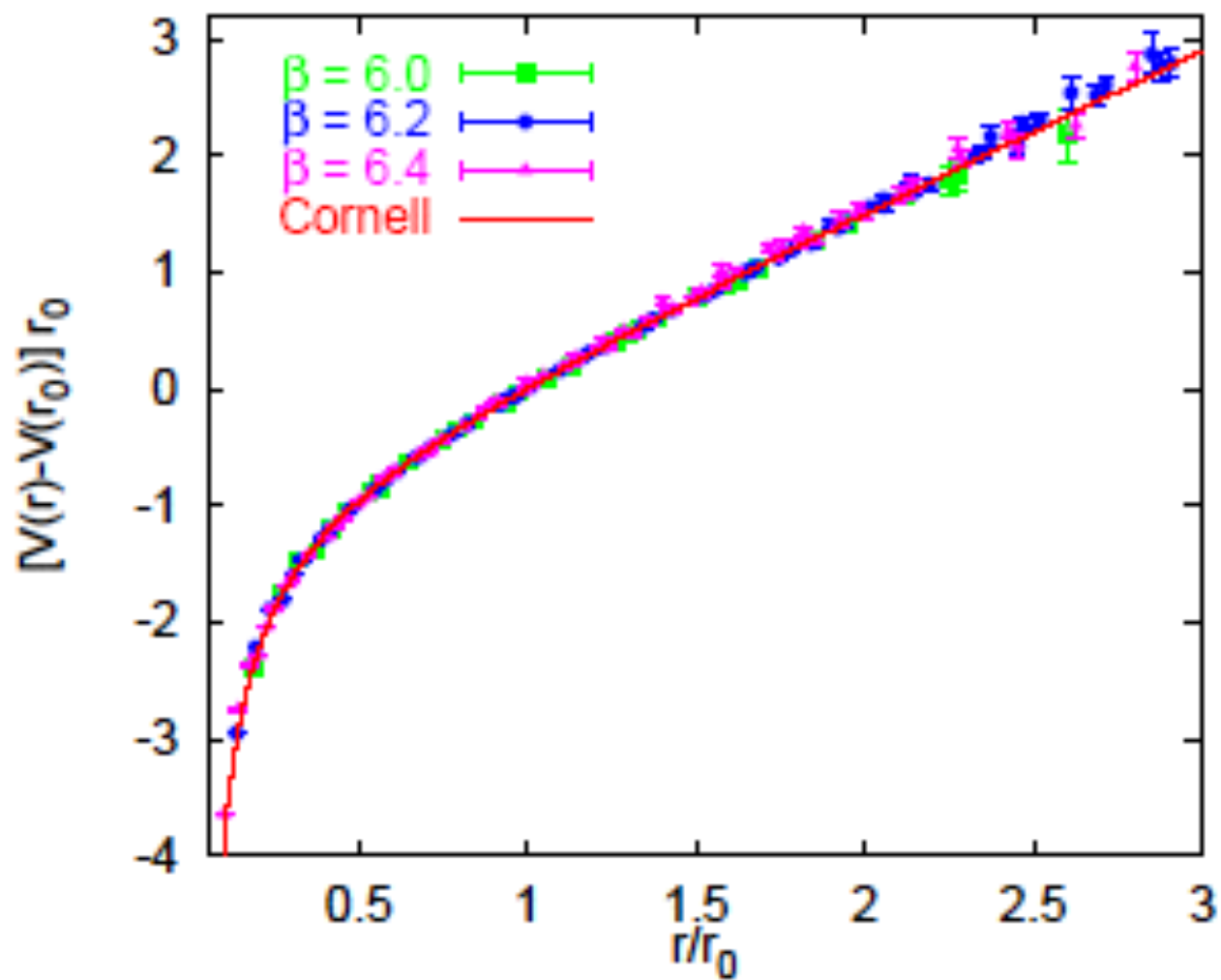
S_G は不変

$$L \mapsto zL$$

(クエンチ近似で $\langle L \rangle \neq 0$ $\longrightarrow$

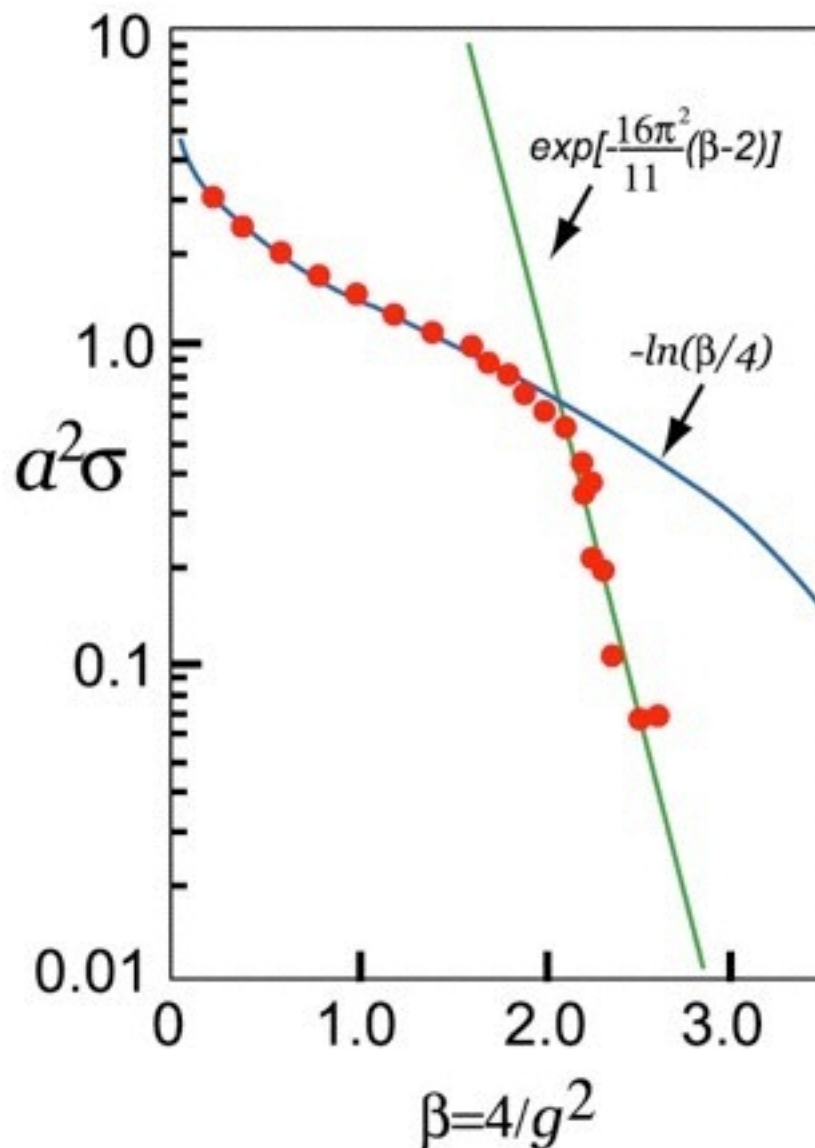
Z3対称性の
自発的破れ

重クォークポテンシャル

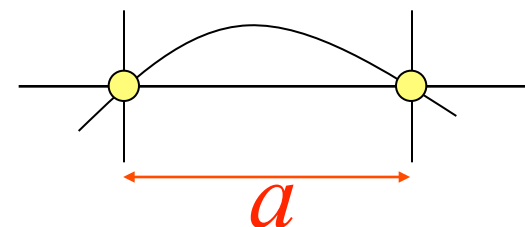


ゲージ結合定数と格子間隔

- 📌 M.Creutz,
- 📌 Phys.Rev.D21,
2308 (1980)
- 📌 SU(2)



📌 格子： (カットオフ) $= \frac{\pi}{a}$



$$m = \frac{1}{a} F(g) \quad m: \text{質量次元をもった量}$$

$$\frac{d}{da} m = 0$$

$$\Rightarrow F = a \frac{dF}{da} = a \frac{dg}{da} \frac{dF}{dg} = -\beta(g) \frac{dF}{dg}$$

$$\beta(g) = -a \frac{dg}{da}$$

$$\beta (g) = -\beta_0 g^3 - \beta_1 g^5 + \dots$$

$$\int \frac{da}{a} = \int \frac{dg}{-\beta (g)} = \int \frac{dg}{\beta_0 g^3 + \beta_1 g^5}$$

$$a = \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{1}{\beta_0 g^2} \right)^{\frac{\beta_1}{2\beta_0^2}} e^{-\frac{1}{2\beta_0 g^2}}$$

$$\frac{dg}{\beta_0 g^3 + \beta_1 g^5} = \frac{da}{a}$$

$$\frac{dg}{\beta_0 g^3 + \beta_1 g^5} = \frac{1}{\beta_0 g^3} \frac{1}{1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} g^2} dg$$

$$= \left(\frac{a_0 + a_1 g + a_2 g^2}{\beta_0 g^3} + \frac{b_0 + b_1 g}{1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} g^2} \right) dg$$

$$= \left(\frac{1 - \frac{\beta_1}{\beta_0} g^2}{\beta_0 g^3} + \frac{-\frac{\beta_1}{\beta_0} g}{1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} g^2} \right) dg$$

$$= \left(\frac{1}{\beta_0 g^3} - \frac{\beta_1}{\beta_0^2 g} + \frac{-\frac{\beta_1^2}{\beta_0^3} g}{1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} g^2} \right) dg$$

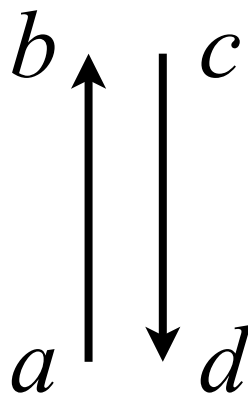
$$= -\frac{1}{2\beta_0} g^{-2} - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \log g - \frac{2\beta_1}{\beta_0^2} \log\left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} g^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2\beta_0} g^{-2} - \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} \log \beta_0 g^2 + \textit{Const}$$

Strong Coupling Expansion

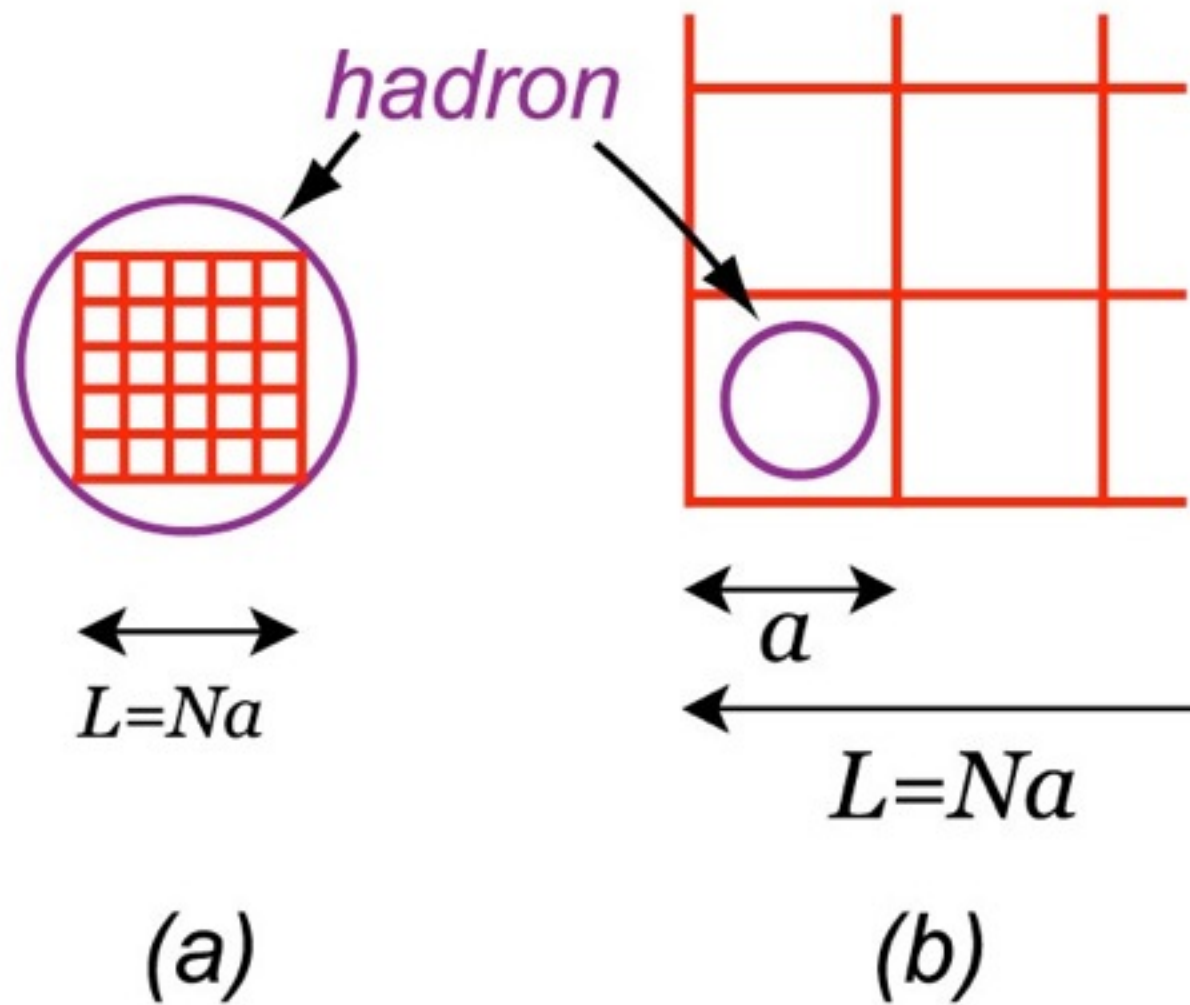
📌 必要な公式

$$\int dU U_{a,b} U^\dagger_{c,d} = \frac{1}{3} \delta_{a,d} \delta_{b,c}$$



Strong Coupling Expansion

$$e^{\frac{2N_c}{g^2} \text{Plaq}} \sim 1 + \frac{2N_c}{g^2}$$



7 Fermions

-  Introduction
-  Notation
-  Gauge Transformation
-  Monte Carlo
-  Actions
-  Some Basic Quantities
-  **Fermions**
-  Hadron Propagators

KS (Kogut-Susskind) フェルミオン

🔧 Wilson fermions

✓

$$W(i, j) = cI - \kappa \sum_{\mu=1}^4 \left\{ (\textcolor{red}{r} - \gamma_{\mu}) U_{i,j} \delta_{i+\hat{\mu},j} + (\textcolor{red}{r} + \gamma_{\mu}) U_{i,j} \delta_{i-\hat{\mu},j} \right\}$$
$$\kappa = \frac{c}{8r + 2ma}$$

r: Wilson項。連続極限では効いていない

🔧 $r = 0$ 、 $c=2ma$ にすると

$$S_F = 2ma \bar{\psi}(x) \psi(x) + \sum_{\mu=1}^4 \left\{ \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} U_{\mu}(x) \psi(x + \hat{\mu}) - \bar{\psi}(x + \hat{\mu}) \gamma_{\mu} U_{\mu}(x)^{\dagger} \psi(x) \right\}$$

カイラル対称性

(1) $\bar{\psi}\psi$ という相互作用

$$\text{A} \quad \begin{cases} \psi & \rightarrow e^{-i\theta} \psi \\ \bar{\psi} & \rightarrow \bar{\psi} e^{+i\theta} \end{cases} \text{ という変換に対して不変}$$

(2) $\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$ という相互作用

$$\text{B} \quad \begin{cases} \psi & \rightarrow e^{+i\theta\gamma_5} \psi \\ \bar{\psi} & \rightarrow \bar{\psi} e^{+i\theta\gamma_5} \end{cases} \text{ という変換に対して不変} \quad (\gamma_{\mu}\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_{\mu} \text{ だから})$$

(1)はBに対して不変ではない


$$\{\gamma_{\mu}, \gamma_5\} = 0$$

$S_F = \bar{\psi} D \psi$ のとき

$\{D, \gamma_5\} = 0$ であればカイラル対称性
を持つ

ウィルソンフェルミオンはウィルソン項
のために、質量ゼロでも駄目

カイラル対称性を持つフェルミオン作用の探
求はみな失敗に終わる

ニールセン・ニ宮の N o G o 定理
(1981)

カイラルフェルミオンの発見

Ginsparg-Wilson (1982)

$$\{D, \gamma_5\} = 2aDR\gamma_5D \text{ であればいい}$$

$$D = 1 - \frac{W}{\sqrt{W^\dagger W}}$$

Neuberger (1998)

8 Hadron Propagators

-  Introduction
-  Notation
-  Gauge Transformation
-  Monte Carlo
-  Actions
-  Some Basic Quantities
-  Fermions
-  Hadron Propagators

クォークプロパゲータ

📌 クォークプロパゲータ
= フェルミオン行列 Δ の逆

📌 Gaussの消去法？

🔴 N^3 の演算 (N: 行列のランク)

🔴 Δ が疎行列(Sparse行列) であることを利用できない

多くの場合

$$\Delta \vec{X} = \vec{b}$$

が解ければ十分

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{X} = \Delta^{-1} \vec{b} = \left(\overset{i}{\Delta} - 1 \right)$$

共役勾配法 (Conjugate Gradient Method, CG法)

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad A: \text{対称、正定値とする。}$$

$$(\vec{x}, A\vec{x}) \geq 0 \quad \text{for}$$

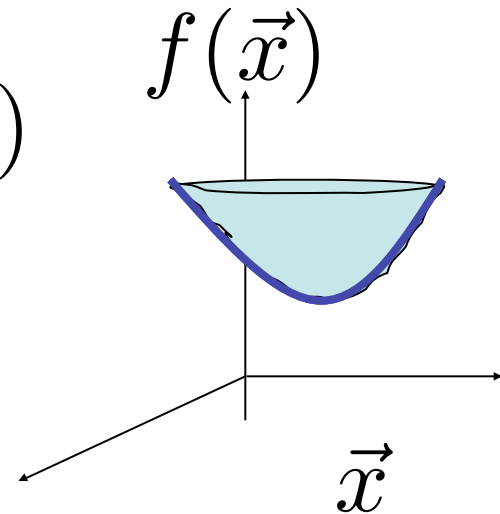
そうでない場合は ${}^t A A \vec{x} = {}^t A \vec{b}$ とする。

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(\vec{x}, A\vec{x}) - (\vec{b}, \vec{x})$$

を最小化

解はもちろん底の所で

$$\nabla f(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b} = \vec{0}$$



CG法

$$\vec{p}^{(0)} = \vec{r}^{(0)} = \vec{b} - A\vec{r}^{(0)}$$

DO i

$$\alpha^{(i)} = \frac{(\vec{p}^{(i)}, \vec{r}^{(i)})}{(\vec{p}^{(i)}, A\vec{r}^{(i)})}$$

$$\vec{x}^{(i+1)} = \vec{x}^{(i)} + \alpha^{(i)} \vec{p}^{(i)}$$

$$\vec{r}^{(i+1)} = \vec{r}^{(i)} - \alpha^{(i)} A\vec{p}^{(i)}$$

$$\beta^{(i)} = \frac{(\vec{r}^{(i+1)}, A\vec{p}^{(i)})}{(\vec{p}^{(i)}, A\vec{p}^{(i)})}$$

$$\vec{p}^{(i+1)} = \vec{r}^{(i+1)} + \beta^{(i)} \vec{p}^{(i)}$$

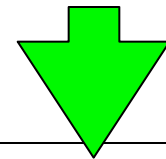
$$\vec{r}^{(i)} = \vec{b} - A\vec{x}^{(i)}$$

Residue, 残差

$$\vec{p}^{(1)}, \vec{p}^{(2)}, \vec{p}^{(3)}, \dots$$

$$\vec{r}^{(1)}, \vec{r}^{(2)}, \vec{r}^{(3)}, \dots$$

線形独立



最大でもN回で収束
計算は

(Matrix) $\times$ (Vector)

ベクトルの内積

グラスマン変数

$$\bar{\psi}_i \psi_j + \psi_j \bar{\psi}_i = 0$$

$$\bar{\psi}_i \bar{\psi}_j + \bar{\psi}_j \bar{\psi}_i = 0,$$

$$\psi_i \psi_j + \psi_j \psi_i = 0$$

$$\int d\bar{\psi}_i = \int d\psi_i = 0,$$

$$\int \bar{\psi}_i d\bar{\psi}_i = \int \psi_i d\psi_i = 1$$

Berezin (1966)

$$\int D\bar{\psi} D\psi e^{-\bar{\psi} A \psi} = \det A,$$

$$\int D\bar{\psi} D\psi (\bar{\psi}_i \psi_j) e^{-\bar{\psi} A \psi} = (A^{-1})_{ji} \det A,$$

$$\int D\bar{\psi} D\psi (\bar{\psi}_i \psi_j \bar{\psi}_k \psi_l) e^{-\bar{\psi} A \psi} = \left\{ (A^{-1})_{ji} (A^{-1})_{lk} - (A^{-1})_{jk} (A^{-1})_{li} \right\} \det A$$

Matthews-Salam公式

Exercise

For $\bar{\psi} A \psi = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix}$

Show that $\int d\bar{\psi}_1 d\psi_1 d\bar{\psi}_2 d\psi_2 e^{-\bar{\psi} A \psi} = \det A$

$$e^{-\bar{\psi} A \psi} = 1 + (\bar{\psi}_1 A_{11} \psi_1 + \bar{\psi}_1 A_{12} \psi_2 + \bar{\psi}_2 A_{21} \psi_1 + \bar{\psi}_2 A_{22} \psi_2) \\ + \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 A_{11} \psi_1 + \bar{\psi}_1 A_{12} \psi_2 + \bar{\psi}_2 A_{21} \psi_1 + \bar{\psi}_2 A_{22} \psi_2)^2 + \dots$$



Only these terms contribute

メソンのプロパゲータ

例：パイ中間子

$$\pi(x) = \bar{u}(x)\gamma_5 d(x) = \bar{u}_\alpha^a(x)(\gamma_5)_{\alpha\beta} d_\beta^a(x)$$

$$\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{u} \mathcal{D}u \mathcal{D}\bar{d} \mathcal{D}d e^{-S_G - \bar{u}\Delta u - \bar{d}\Delta d} \frac{\pi(x)\pi(y)^\dagger}{\dots\dots\dots}$$



$$= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U e^{-S_G} \det \Delta^{(u)} \det \Delta^{(d)} \bar{u}_\alpha^a(x)(\gamma_5)_{\alpha\beta} d_\beta^a(x) (-\bar{d}_{\alpha'}^b(y)(\gamma_5)_{\alpha'\beta'} u_{\beta'}^b(y))$$

$$\times \frac{G^{(u)ba}_{\beta'\alpha}(y,x)(\gamma_5)_{\alpha\beta} G^{(d)ab}_{\beta\alpha'}(x,y)(\gamma_5)_{\alpha'\beta'}}{\dots\dots\dots}$$



$$Tr \left(G^{(u)}(y,x) \gamma_5 G^{(d)}(x,y) \gamma_5 \right)$$

$$\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U e^{-S_G} \det \Delta^{(u)} \det \Delta^{(d)} \\ \times \text{Tr} \left(G^{(u)}(y, x) \gamma_5 G^{(d)}(x, y) \gamma_5 \right)$$



$$G^{(u)} \equiv (\Delta^{(u)})^{-1} \quad G^{(d)} \equiv (\Delta^{(d)})^{-1}$$

例 2 sigma メソン

$$\sigma(x) = \frac{\bar{u}(x)u(x) + \bar{d}(x)d(x)}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\bar{u}_{\alpha}^a(x)u_{\alpha}^a(x) + \bar{d}_{\alpha}^a(x)d_{\alpha}^a(x)}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{u} \mathcal{D}u \mathcal{D}\bar{d} \mathcal{D}d e^{-S_G - \bar{u}\Delta u - \bar{d}\Delta d} \sigma(x)\sigma(y)^{\dagger}$$

$$\frac{\bar{u}_{\alpha}^a(x)u_{\alpha}^a(x) + \bar{d}_{\alpha}^a(x)d_{\alpha}^a(x)}{\sqrt{2}} \times \frac{\bar{u}_{\beta}^b(y)u_{\beta}^b(y) + \bar{d}_{\beta}^b(y)d_{\beta}^b(y)}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow & (G_{\alpha\alpha}^{(u)aa}(x,x)G_{\beta\beta}^{(u)bb}(y,y) - G_{\alpha\beta}^{(u)ab}(x,y)G_{\beta\alpha}^{(u)ba}(y,x)) \\ & + G_{\alpha\alpha}^{(d)aa}(x,x)G_{\beta\beta}^{(u)bb}(y,y) + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U e^{-S_G} \det \Delta^{(u)} \det \Delta^{(d)}$$

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(G^{(u)}(x, x)) \text{Tr}(G^{(u)}(y, y)) - \text{Tr}(G^{(u)}(x, y) G^{(u)}(y, x)) \\ & + \text{Tr}(G^{(d)}(x, x)) \text{Tr}(G^{(u)}(y, y)) + \text{Tr}(G^{(u)}(x, x)) \text{Tr}(G^{(d)}(y, y)) \\ & + \text{Tr}(G^{(d)}(x, x)) \text{Tr}(G^{(d)}(y, y)) - \text{Tr}(G^{(d)}(x, y) G^{(d)}(y, x)) \end{aligned}$$

$G^{(u)} = G^{(d)}$ の時

$$\begin{aligned} & 2\text{Tr}(G(x, x)) \text{Tr}(G(y, y)) - 2\text{Tr}(G(x, y) G(y, x)) \\ & + 2\text{Tr}(G(x, x)) \text{Tr}(G(y, y)) \end{aligned}$$

