超弦理論の数値シミュレーション

～ Yang-Mills理論とブラックホールの熱力学 ～

伊敷 吾郎 (京大基研)

arXiv:1311.5607

共同研究者

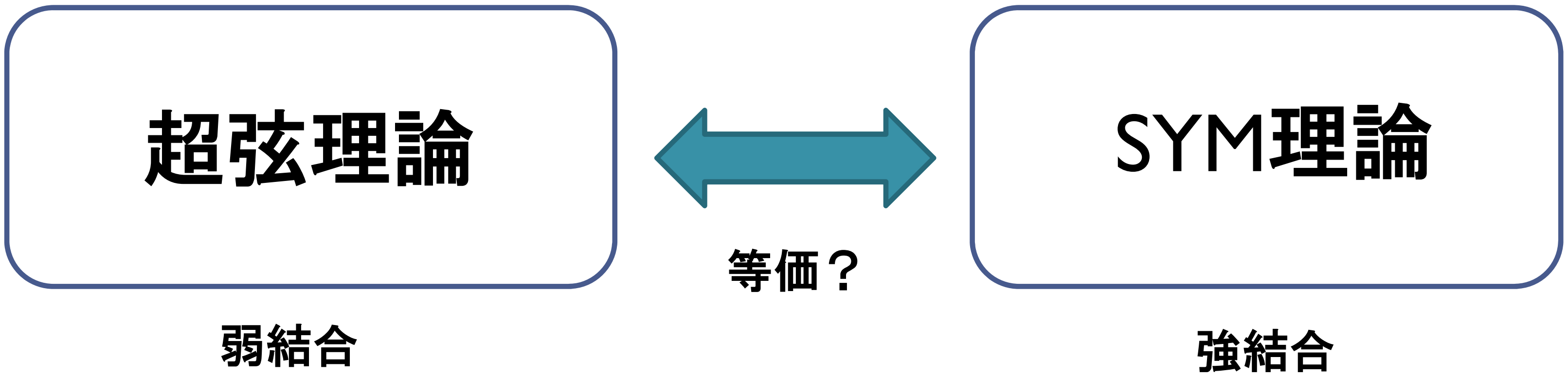
花田政範（京大基研）、百武慶文（茨城大学）、西村淳（KEK・総研大）

Introduction

- 超弦理論: 摂動論的に定義された量子重力理論

- ゲージ/重力対応: 超弦理論はSuper Yang-Mills理論(SYM)を用いて記述できるという予想

['96 Maldacena]



- この分野の主な研究方針

・等価性が本当かどうか検証する　←本研究

・ 等価性を仮定して
  - SYMを用いて重力の量子効果を理解する
  - 重力理論を用いてSYMの強結合領域を理解する

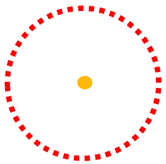
cf. Gubser, Klebanov, Tseytlin (1998)

ブラックホール⇔ Dブレーン

N個のDブレーンを考える

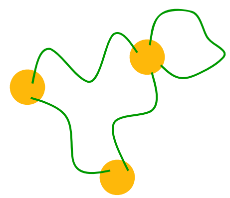
超重力理論
(超弦理論の低エネルギー理論)

ホライズン



10次元時空における
ブラックホール

ブレーン上のゲージ理論



SYMの熱力学系

ブラックホールの熱力学 [Hawking, Bekenstein]
がゲージ理論から再現できるか？

[cf. Anagnostopoulos-Hanada-Nishimura-Takeuchi, Catterall-Wiseman, Kato-san’s talk]

我々のセットアップと結果

◆ 本研究では両側から内部エネルギー計算し、等価性を検証した。

IIA型超弦理論の
Black 0-brane 解

BFSS 行列模型
(１次元のU(N)SYM)

BF解を構成し
解析的に計算

$$\boxed{\frac{E}{N^2} = 7.41T^{2.8} - \frac{5.77}{N^2}T^{0.4}}$$

SYMのMC計算で
数値的にチェック

重力の1-loop補正　$g_s \sim 1/N$

重力の1-loopの効果まで含めて等価性を確認！

Non-SUSY, Non-AdSでの対応

◆ Nature newsで記事として取り上げられ、2013年で最も読まれた記事に！

◆ ヨーロッパのいくつかの新聞でも取り上げられる。

◆ その後、日本にも情報が拡散する。
しかし、その過程で間違った認識が広ってしまう。

某有名掲示板サイトによると、我々は
この宇宙の存在は別の「パラレル宇宙」からのホログラムである
ということを示したことなっていました。

◆ 我々のやったことは１０次元重力理論と１次元SYMの等価性の検証。

[Hyakutake, arXiv:1311.7526]

超弦理論側: ブラックホール解

- 超重力理論（+弦の1-loop補正）

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{tree}} + \mathcal{S}_{\text{1-loop}}$$

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{\text{tree}} = \dfrac{1}{2\kappa_{10}^2} \displaystyle\int d^{10}x \sqrt{-g} \Big(R + \cdots \Big) \\ \mathcal{S}_{\text{1-loop}} = \dfrac{\alpha'^3 g_s^2}{2\kappa_{10}^2} \displaystyle\int d^{10}x \sqrt{-g} \Big([R^4] + [G^2 R^3] + \cdots \Big) \end{cases}$$

- 運動方程式を解いて、ブラックホール解を構成

◆ Non-extremal Black 0-brane 解 (Near Horizon limit)

$$ds_{11}^2 = \ell_s^4 \Big(-H_1^{-1} F_1 dt^2 + F_1^{-1} U_0^2 dx^2 + U_0^2 x^2 d\Omega_8^2 + \big(\ell_s^{-4} H_2^{\frac{1}{2}} dz - H_3^{-\frac{1}{2}} dt\big)^2 \Big),$$

$$H_i = \frac{(2\pi)^2 15\pi\lambda}{U_0^7}\Big(\frac{1}{x^7} + \epsilon \frac{\lambda^2}{U_0^6} h_i\Big), \quad (i = 1,2,3), \qquad F_1 = 1 - \frac{1}{x^7} + \epsilon \frac{\lambda^2}{U_0^6} f_1, \qquad \epsilon = \frac{\pi^6}{2^7 3^2 N^2},$$

$$\left\{ \begin{aligned}
h_1 &= \frac{1302501760}{9x^{34}} - \frac{57462496}{x^{27}} + \frac{12051648}{13x^{20}} - \frac{4782400}{13x^{13}} \\
&\quad - \frac{3747840}{x^7} + \frac{4099200}{x^6} - \frac{1639680(x-1)}{(x^7-1)} + 117120\Big(18 - \frac{23}{x^7}\Big) I(x), \\
h_2 &= \frac{19160960}{x^{34}} - \frac{58528288}{x^{27}} + \frac{2213568}{13x^{20}} - \frac{1229760}{13x^{13}} \\
&\quad - \frac{2108160}{x^7} + \frac{2459520}{x^6} + 1054080\Big(2 - \frac{1}{x^7}\Big) I(x), \\
h_3 &= \frac{361110400}{9x^{34}} - \frac{59840032}{x^{27}} - \frac{24021312}{13x^{20}} + \frac{3747840}{x^{14}} - \frac{58072000}{13x^{13}} \\
&\quad - \frac{2108160}{x^7} + \frac{2459520}{x^6} + 117120\Big(18 - \frac{41}{x^7}\Big) I(x), \\
f_1 &= -\frac{1208170880}{9x^{34}} + \frac{161405664}{x^{27}} + \frac{5738880}{13x^{20}} + \frac{956480}{x^{13}} + \frac{819840}{x^7} I(x),
\end{aligned} \right.$$

$$I(x) = \log(x-1) - \log(1 - x^{-7}) - \sum_{n=1,3,5} \cos\tfrac{n\pi}{7} \log\Big(x^2 + 2x\cos\tfrac{n\pi}{7} + 1\Big) - 2\sum_{n=1,3,5} \sin\tfrac{n\pi}{7} \Big\{ \tan^{-1}\Big(\frac{x + \cos\frac{n\pi}{7}}{\sin\frac{n\pi}{7}}\Big) - \frac{\pi}{2} \Big\}.$$

ブラックホールの熱力学

◆ ホーキング温度

$$\tilde{T} = \frac{1}{4\pi} U_0^{-1} H_1^{-\frac{1}{2}} F_1' \Big|_{x_{\mathrm{H}}} \Big/ \lambda^{\frac{1}{3}} = a_1 \tilde{U}_0^{\frac{5}{2}} \left(1 + \epsilon a_2 \tilde{U}_0^{-6}\right)$$

◆ エントロピー

$$S = a_3 N^2 \tilde{T}^{\frac{9}{5}} \left(1 + \epsilon a_4 \tilde{T}^{-\frac{12}{5}}\right)$$

（Waldの公式より）

◆ エネルギー

$$\frac{\tilde{E}}{N^2} = \frac{9}{14} a_3 \tilde{T}^{\frac{14}{5}} - \epsilon \frac{3}{2} a_3 a_4 \tilde{T}^{\frac{2}{5}} \sim 7.41 \tilde{T}^{\frac{14}{5}} - \frac{5.77}{N^2} \tilde{T}^{\frac{2}{5}}$$

ゲージ理論側: SYMの数値計算

◆ BFSS行列模型 (1d U(N) SYM)

$$S = N\int_0^\beta dt \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}(DX_i)^2 - \frac{1}{4}[X_i,X_j]^2 + \frac{1}{2}\psi D\psi - \frac{1}{2}\psi\gamma_i[X_i,\psi]\right)$$

$$i = 1,\cdots,9$$

$$D = \partial - i[A,\ \ ]$$

$N \times N$ 行列

◆ 運動量カットオフによる正則化

$$A = \frac{1}{\beta}\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_N) \qquad (\alpha_i : \mathrm{const})$$

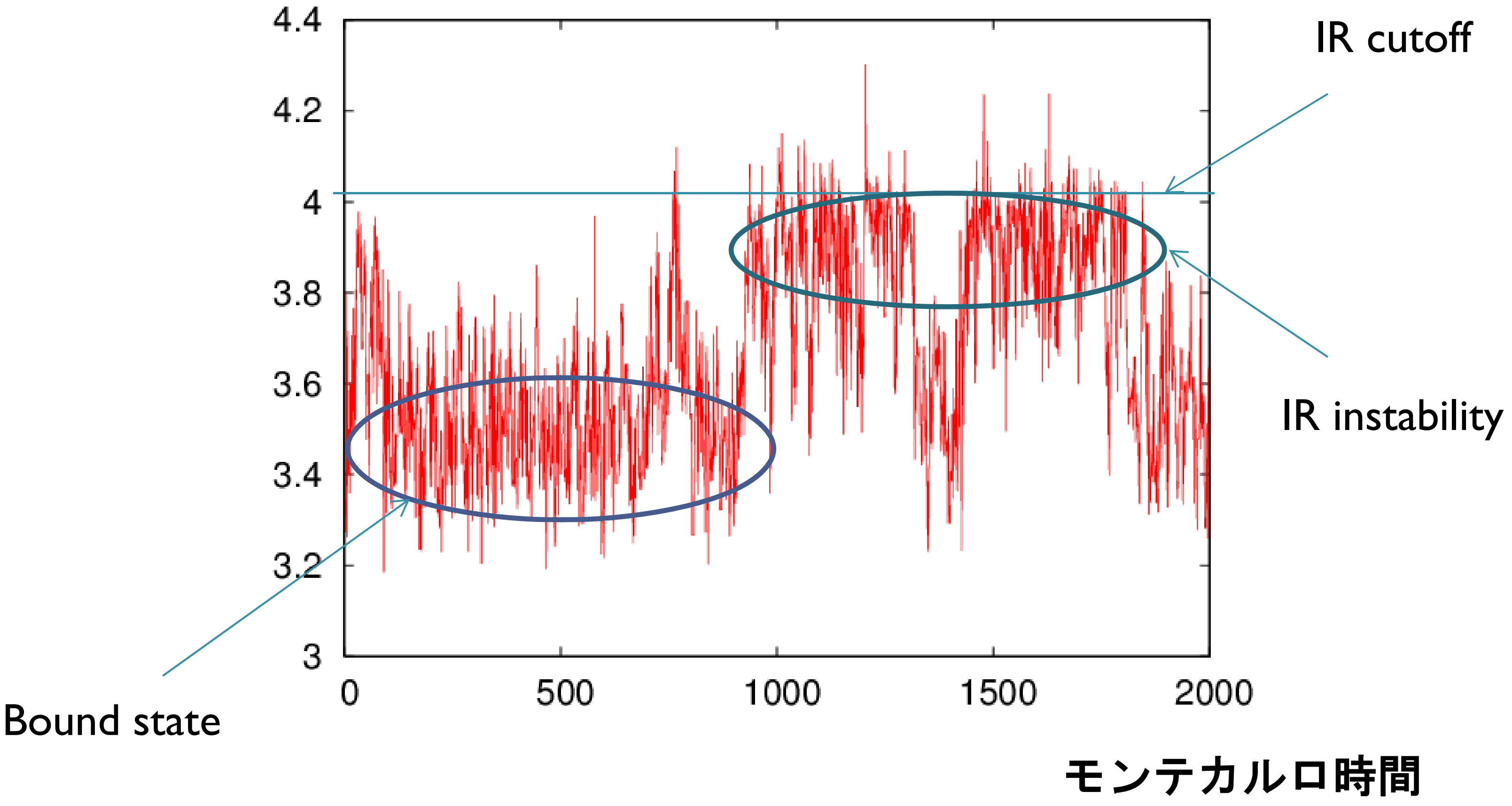
Λ : UVカットオフ

$$X(t) = \sum_{n=-\Lambda}^{\Lambda} X_n e^{\frac{2\pi i n t}{\beta}} \qquad \psi(t) = \sum_{n=-(\Lambda-1/2)}^{\Lambda-1/2} \psi_n e^{\frac{2\pi i n t}{\beta}}$$

α_i と各フーリエモードに関してRHMCによる数値計算を行った。

Bound state ⇔ Black 0-brane

$$R^2 := \frac{1}{N\beta}\int_0^\beta dt \mathrm{Tr} X_i(t)^2$$ の履歴

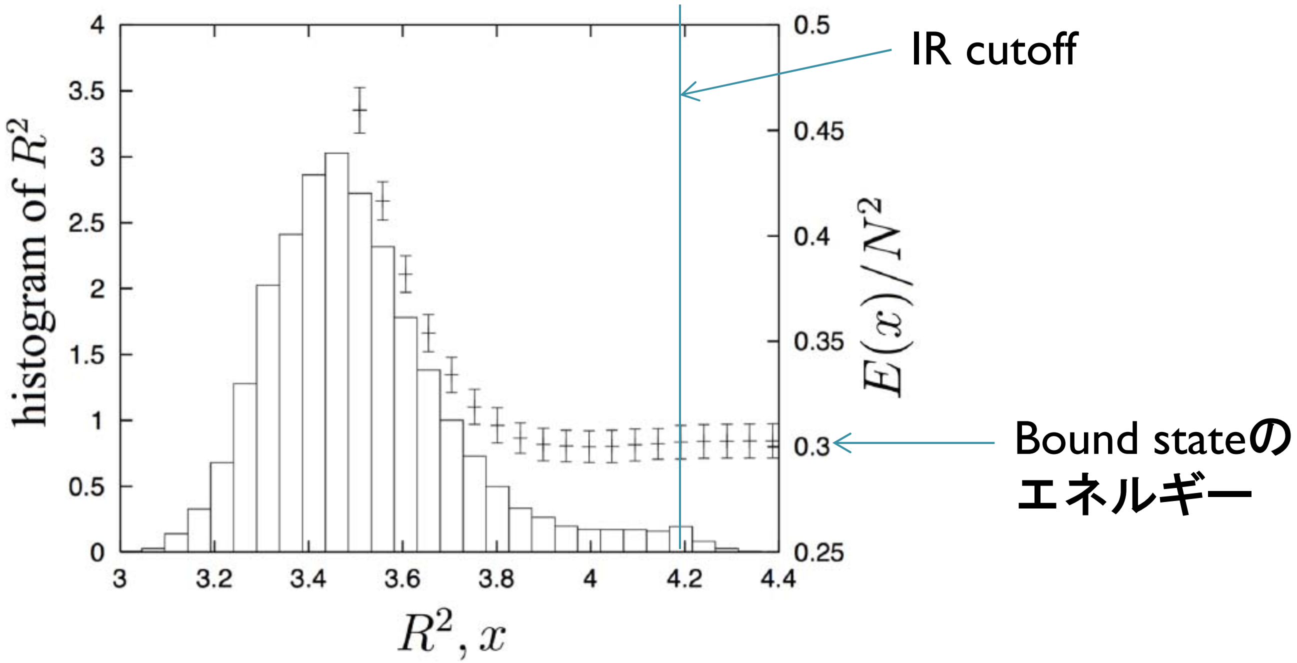


Black holeに対応するbound stateのエネルギーを求めたい。

Energy of bound state

$$R^2 := \frac{1}{N\beta}\int_0^\beta dt \mathrm{Tr} X_i(t)^2$$

$$\frac{E(x)}{N^2} := R^2 < x$$ を満たす配位のみで計算したエネルギーの値

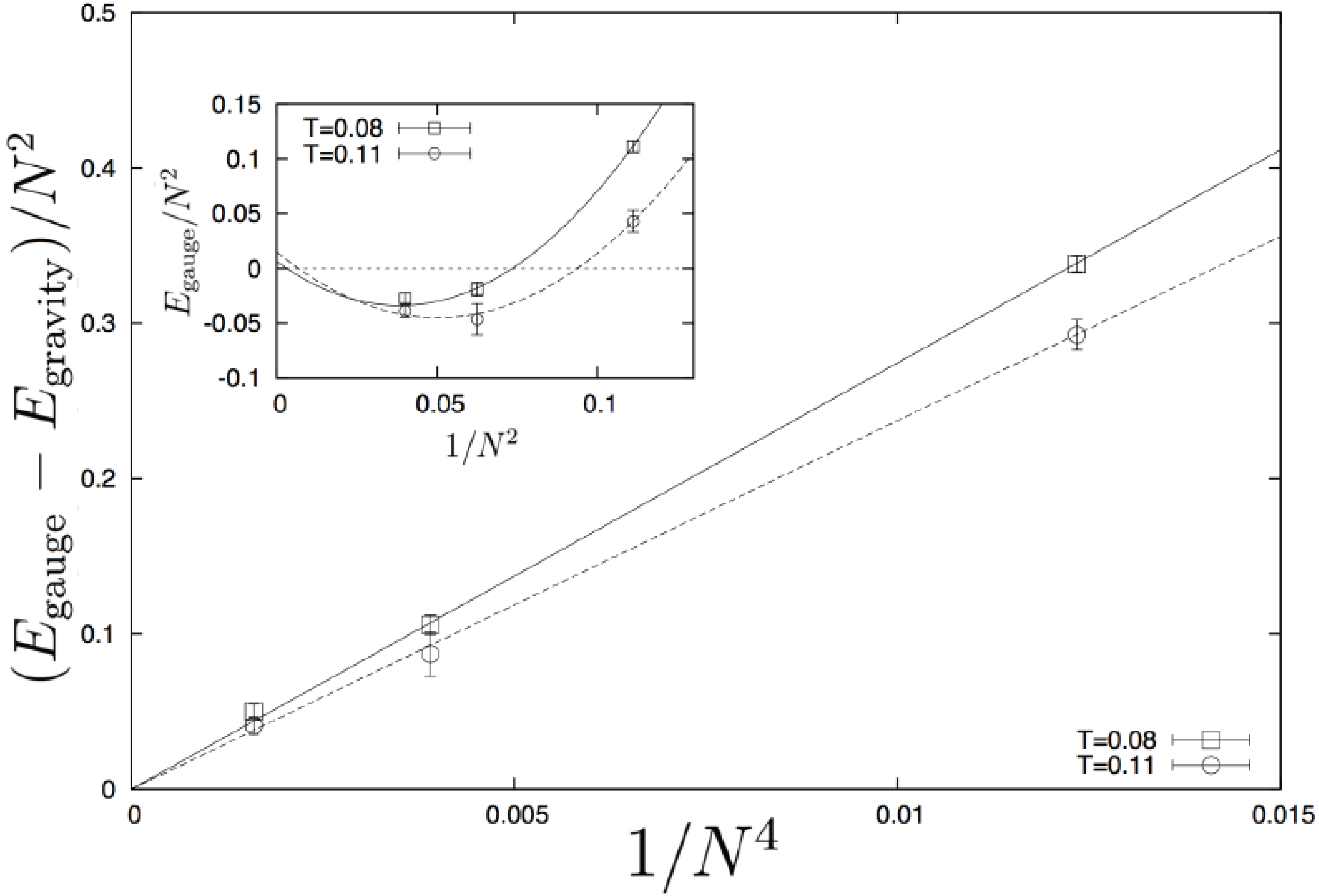


Bound stateのエネルギー $:= \min\{E(x)/N^2 | x < \mathrm{IR\ cutoff}\}$

結果

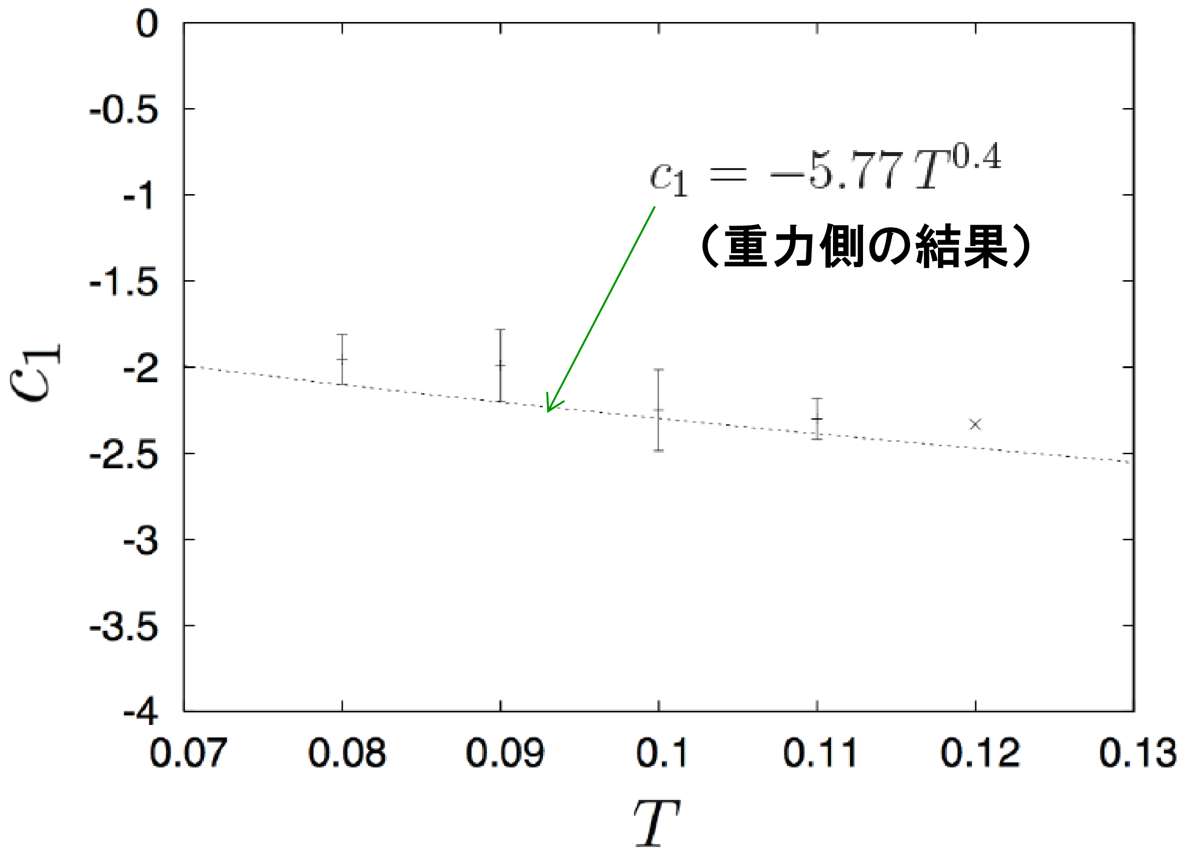
（SYMの結果）ー（重力側の結果）～ $\dfrac{1}{N^4}$

$\dfrac{1}{N^2}$ の補正項まで一致している。



SYMの結果を以下の関数形でフィットして $c_1(T)$ を重力側と比較

$$E(T)/N^2 = 7.41T^{2.8} + \frac{c_1(T)}{N^2} + \frac{c_2(T)}{N^4}$$



まとめ

- 超弦理論の最初の量子補正まで含めて、
  ブラックホールのエネルギーを温度の関数として求めた。

- 双対なゲージ理論の数値計算を行い、この関数形が再現される
  ことを確かめた。

  Non-SUSY理論、Non-AdS時空に対する
  ゲージ/重力対応の量子重力レベルでの検証

今後の課題

- より広いのパラメータ領域？ 他の物理量？ BMN模型, 高次元のSYM ？

- SYMの数値計算からブラックホールの量子論的性質が理解できるか？