

テンソル模型の量子化と 厳密な波動関数

笹倉 直樹

京都大学 基礎物理学研究所

離散的手法による場と時空のダイナミクス

2013年9月27-30日, 高エネルギー物理学研究所

量子重力とは

▶目標

より素な自由度から時空間と重力が創発されるような量子重力理論を作ること。単に一般相対論の量子化とは異なる。

背景のアイデア：時空間は基本的な存在ではなく、ダイナミクスの結果として生じる。

S. Carlip, “Challenges for Emergent Gravity,” arXiv:1207.2504 [gr-qc]

▶現実との様々な無矛盾性を要求

滑らかな古典的時空間、3次元性、局所性、因果性、対称性、重力、物質

▶ トークの内容

ハミルトン形式によるテンソル模型（階数3）を
Wheeler-DeWittの手法により量子化し、 $N=2$ の場合に
厳密な波動関数を求め、その性質を議論する。

N.Sasakura, “Quantum canonical tensor model
and an exact wave function,”
Int.J.Mod.Phys.A28,1350111 (2013)
[arXiv:1305.6389 [hep-th]].

ダイナミカルな自由度

3階完全対称実テンソルの正準共役変数

$$M_{abc}, P_{abc} \quad a, b, c = 1, 2, \dots, N$$

量子化は（一般化された）エルミート条件を満たす場
場合も同様

$$M_{abc} = M_{bca} = M_{bac}^*$$

力学的対称性： $O(N)$

$$\begin{aligned} M_{abc} &\rightarrow J_a^{a'} J_b^{b'} J_c^{c'} M_{a'b'c'} \\ P_{abc} &\rightarrow J_a^{a'} J_b^{b'} J_c^{c'} P_{a'b'c'} \end{aligned} \quad J \in O(N)$$

目次

- テンソル模型
- ファジー空間のダイナミクスとしてのテンソル模型
- 無矛盾な局所時間発展
- 一般相対論との類似性（局所性の重要性）
- Wheeler-DeWitt流の量子化
- 宇宙の波動関数
- 局所性の創発

テンソル模型

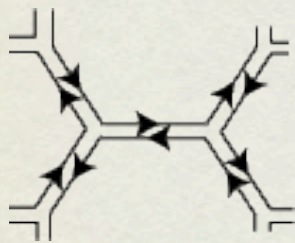
▶ 行列模型

行列模型
 M_{ab}

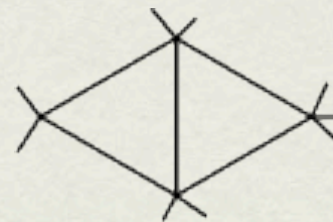


2次元動的単体分割模型
2-dim Simplicial Quantum Gravity

ファイマン図



単体分割された2次元面



分配関数(Free energy)
ファイマン図の足し上げ



2次元量子重力の分配関数
ランダム2次元面の足し上げ

▶ 3次元以上への一般化

Ambjorn et al., NS, Gross, 1990

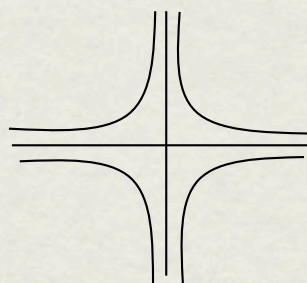
テンソル模型



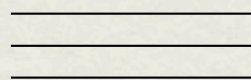
3次元以上の動的単体分割模型

双対

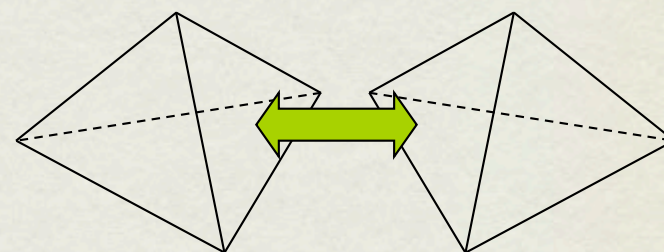
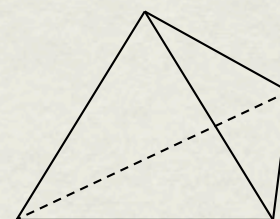
例：3次元の場合



vertex



propagator



四面体の貼り付け

$$S = M_{abc}M_{bac} - gM_{abc}M_{ade}M_{bef}M_{cfd}$$

Hermiticity(generalized): $M_{abc} = M_{bca} = M_{cab} = M_{bac}^* = M_{acb}^* = M_{cba}^*$

▶ Hermiteなテンソル模型の現状

● 解析的計算方法が知られていない。

● $1/N$ 展開が知られていない。Leadingの寄与のトポロジー的特徴付けも不明。

● ファイマンダイアグラムには、単体分割とうまく対応しないものがある。例えば、向き付け不可能なものも含む。

● 別の解釈（後述）では有効。

▶ ただし、形式としての発展はある。

● Group Field Theory

indexをリ一群にする $a \rightarrow g$

Boulatov model（3次元）, Ooguri model（4次元）

BF-theory、Ponzano-Regge模型

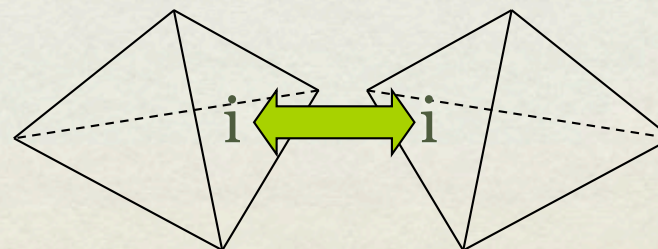
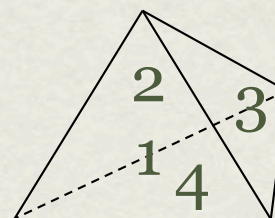
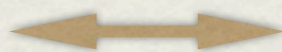
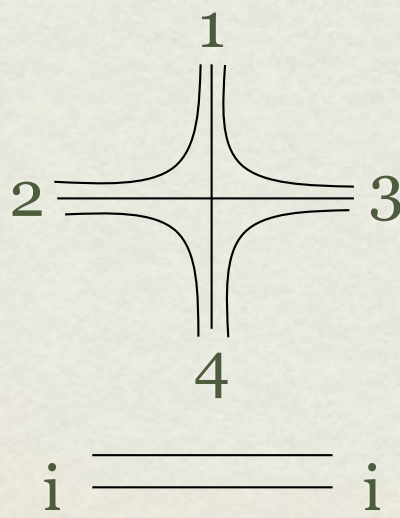
ループ量子重力の定義-グラフ間のウェイト

► Colored Tensor Model Gurau, 2009

表面の単体に“color”を付与し、同一のcolor同士のみ貼付け可能。貼付け方も固定。エルミート条件を課さない。

例：3次元の場合

$$S = \sum_{i=1}^4 M_{abc}^i M_{abc}^{i*} - g M_{abc}^1 M_{ade}^2 M_{bef}^3 M_{cfd}^4 + c.c.$$



同一カラーの面のみが貼れる

► Colored Tensor Modelの現状

R.Gurau and J.P.Ryan, SIGMA 8, 020 (2012) [arXiv:1109.4812 [hep-th]].

● ファイマン図に対応する単体分割多様体を一対一に構成できる。

● $1/N$ 展開が存在する。Leadingは球面から来る。

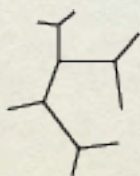
$$F = f_0 N^D + f_1 N^{D-1} + \dots$$

● 幾つかの解析的計算が行われている。(leading, sub-leading)

しかし、

Leadingのグラフはmelonic。singular。広がった球面ではない。

実際、臨界指数はBranched polymer。



R.Gurau and J.P.Ryan, “Melons are branched polymers,”
arXiv:1302.4386 [math-ph].

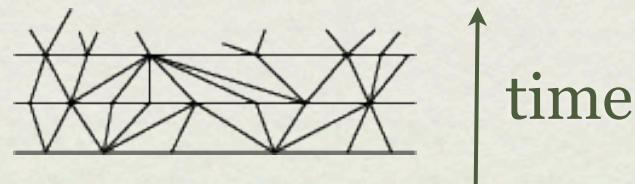
時間の必要性

テンソル模型から広がった空間を得るにはどうしたら良いか？

● 数値計算からのヒント

Euclidean Dynamical Triangulation (DT) はうまく行かないが、Causal Dynamical Triangulation (CDT) は広がった空間を生成。

1 + 3 次元のド・ジッター時空を生成。 Ambjorn et al.



量子重力の定式化においては、時間方向が本質的に重要では。

ハミルトン形式によるテンソル模型

CANONICAL TENSOR MODEL NS 2012

▶ ファジー空間の時間発展のダイナミクスを記述

ファジー空間：空間を座標系ではなく、それ上の関数の代数で記述。いわゆる非可換空間の一般化。（結合則も可換性も仮定しない。）

$$f_a \star f_b = M_{abc} f_c \quad \text{関数 } \{f_a | a = 1, 2, \dots, N\}$$

↑
テンソル模型の自由度：時間変化するダイナミカルな量

ファジー空間は原理的には任意次元の任意の時空間を記述できる。

3 階テンソル模型は任意次元の量子重力を表す。

Hermiticity条件



$$f_a^* = f_a$$

$$(f_a \star f_b)^* = f_b \star f_a$$

$$\langle f_a | f_b \rangle = \delta_{ab}$$

$$\langle f_a | f_b \star f_c \rangle = \langle f_a \star f_b | f_c \rangle = \langle f_c \star f_a | f_b \rangle$$

トレース的な内積

Frobenius algebra (結合則があるとき)

Axiomatic TFT

ファジー空間の簡単な例（可換。例 2 と 3 は非結合的）

例 1 : 通常的空間

$$\text{関数} : \{f_z = \delta^D(x - z) \mid z \in R^D\}$$

$$f_{z_1} \star f_{z_2} = \delta^D(z_1 - z_2) f_{z_1}$$

$$\langle \rangle = \int d^D x$$

例 2 : momentum cutoff

$$\text{関数} : \{e^{ipx} \mid |p| < \Lambda\}$$

$$e^{ipx} \star e^{iqx} = \begin{cases} e^{i(p+q)x} & \text{if } |p+q| < \Lambda \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

例 3 : Gaussian

$$f_x \star f_y = A(\beta) \int d^D z \exp[-\beta(x - y)^2 - \beta(y - z)^2 - \beta(z - x)^2] f_z$$

$\beta \rightarrow \infty$: 局所的極限。通常の空間。

$$(e^{ipx} e^{iqx} = \exp[-\alpha(p^2 + q^2 + (p + q)^2)] e^{i(p+q)x})$$

▶ ファジー空間の局所性について（後の議論で使用）

局所性： M_{abc} が $a \sim b \sim c \sim a$ でのみ大きな値をとる。

$\sim$ ：なんらかの近傍の概念

O(N)変換（ $f'_a = J_a^b f_b$, $J \in O(N)$ ）不変な概念でない。

一般的に与えるのは困難だが、ケースバイケースで与える事は可能だろう。

しかし、局所性を量るようなO(N)不変量は存在する。

$$\begin{aligned} l &= M_{acd}M_{bde}M_{bef}M_{afc} - M_{acd}M_{bde}M_{aef}M_{bfc} \\ &= -\frac{1}{2}\text{Tr} \left([M^{(a)}, M^{(b)}][M^{(a)}, M^{(b)}] \right) \end{aligned}$$

$$M_{bc}^{(a)} \equiv M_{abc} \quad (\text{完全対称テンソル})$$

proposition

M_{abc} が実かつ対称テンソルのとき

$$l = 0 \iff M_{abc} = J_a^{a'} J_b^{b'} J_c^{c'} M_{a'b'c'}^D$$

$$M_{abc}^D = m_a \delta_{ab} \delta_{ac} \quad \text{完全対角形}$$

$$\exists m_a \geq 0$$

$$\exists J \in O(N)$$

証明

l は半正定値。また、 $l = 0 \iff [M^{(a)}, M^{(b)}] = 0$ 。 $M^{(a)}$ は、実対称行列なので、 $[M^{(a)}, M^{(b)}] = 0$ は、 $\exists J \in O(N)$ により同時対角化可能と同値。 M_{abc} は対称テンソルなので、 J により、上記の完全対角の形に変換される。

$l = 0$ のとき、ファジー空間の点は互いに独立。最大の局所性。

$$f_a \star f_b = m_a \delta_{ab} f_a$$

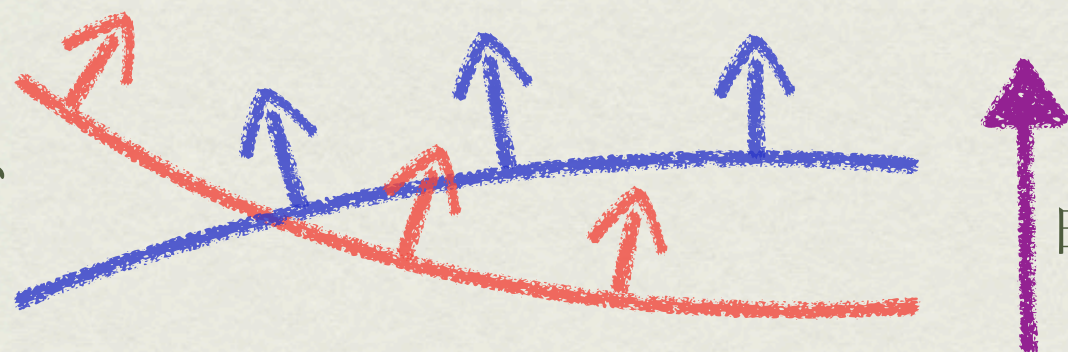
CANONICAL TENSOR MODELの 局所的ハミルトニアンの決定

f_a : 直感的には“点”

各点ごとに局所的ハミルトニアン : $\mathcal{H}_a$

大局的ハミルトニアンは直ちに相対論と矛盾するだろう。

無数のパス
がある



初期値

時間発展

局所的時間発展
の相互無矛盾性



$[\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b] = 0$ upto kinematic symmetry

$$f'_a = J_a^b f_b, \quad J \in so(N)$$

▶ Canonical Tensor Modelを完全拘束系として定義

$$H = N_a \mathcal{H}_a + N_{[ab]} \mathcal{J}_{[ab]} + N \mathcal{D}$$

$\mathcal{H}_a, \mathcal{J}_{[ab]}, \mathcal{D}$: 第一種拘束条件

$N_a, N_{[ab]}, N$: multipliers

一般相対論 (ADM形式)
に類似

$$\mathcal{H}_a = \frac{1}{2} P_{abc} P_{bde} M_{cde} \longleftarrow \text{局所ハミルトニアン}$$

$$\mathcal{J}_{[ab]} = \frac{1}{4} (P_{acd} M_{bcd} - P_{bcd} M_{acd}) \longleftarrow \text{so(N)生成子}$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{6} M_{abc} P_{abc} \longleftarrow \begin{array}{l} \text{ダイナミクスの発散を抑制} \quad \frac{dx}{dt} = x^2 \\ \text{スケール変換の生成子。} \quad f_a \rightarrow c f_a \text{を同一視} \end{array}$$

(議論の余地あり Raffaelli, Sato, NS)

$$\{M_{abc}, P_{def}\} = \delta_{ad}\delta_{be}\delta_{cf} + (\text{perm. of } def)$$

▶ $\mathcal{H}_a, \mathcal{J}_{[ab]}, \mathcal{D}$ は第一種拘束系 (On-shellで閉じる)

$$\{H(T^1), H(T^2)\} = J([\tilde{T}^1, \tilde{T}^2]),$$

$$H(T) = T_a \mathcal{H}_a,$$

$$\{J(V), H(T)\} = H(VT),$$

$$J(V) = V_{[ab]} \mathcal{J}_{[ab]},$$

$$\{J(V^1), J(V^2)\} = J([V^1, V^2]),$$

$$\tilde{T}_{ab} \equiv P_{abc} T_c$$

$$\{\mathcal{D}, H(T)\} = H(T),$$

$$\{\mathcal{D}, J(V)\} = 0,$$

● 局所ハミルトニアンは唯一。

条件：代数が閉じる、最大3次、時間反転不変性、連結性。

$\mathcal{D}$ が無く、かつ、完全対称テンソルの場合には、“宇宙項” M_{abb} を加える事ができる。エルミートな場合には、加えられない。

● 構造関数を持つ。 (構造定数ではない。一般相対論と類似)

● $M \leftrightarrow P$ を行っても、拘束代数は不変。

拘束の時間反転は変更される。 $\mathcal{H}_a \rightarrow -\mathcal{H}_a$

一般相対論との類似性

▶ 一般相対論 (ADM形式) の拘束代数 (ディラック代数) が、テンソル模型の拘束代数の局所極限 $\beta \rightarrow \infty$ で導かれる。

$$P_{xyz} = \beta^c (g(x)g(y)g(z))^{\frac{1}{4}} \exp [-\beta (d(x, y)^2 + d(y, z)^2 + d(z, x)^2)]$$

x, y, z : D次元座標

$$g(x) = \det [g_{\mu\nu}(x)]$$

$d(x, y)$: x, y 間の測地線距離

構造関数

$$\{H(T_1), H(T_2)\} = J(g^{ij}(T_1 \partial_j T_2 - T_2 \partial_j T_1))$$

$$\{J(V^i), H(T)\} = H(V^i \partial_i T)$$

$$\{J(V_1^i), J(V_2^i)\} = J(V_1^j \partial_j V_2^i - V_2^j \partial_j V_1^i)$$

$$H(T) = \int dx \, T(x) \mathcal{H}(x)$$

Hamiltonian constraints

$$J(V^i) = \int dx \, V^i(x) \mathcal{H}_i(x)$$

Momentum constraints

テンソル模型の局所性と GEOMETRODYNAMICS

▶一般相対論は拘束代数から導かれる。Hojman-Kuchar-Teitelboim, 1976

Canonical Tensor Model



局所極限 (他にもD次元空間などの仮定もある)

Constraint (Dirac) algebra of general relativity



ハミルトニアンが決まる。(時間反転不変性を仮定)

一般相対論

しかし、先の極限操作は形式的。**Canonical Tensor Modelのダイナミクスから局所性が導かれるべき。**

以降では、量子化を行い、ダイナミクスを見る。

量子化

▶ 共役変数の量子化

$$[\hat{M}_{abc}, \hat{P}_{def}] = i \delta_{ad} \delta_{be} \delta_{cf} + \text{perm. of } def$$

▶ 拘束条件の量子化

共変性より $\hat{\mathcal{H}}_a = \hat{P}_{abc} \hat{P}_{bde} \hat{M}_{cde} + i \lambda_H \hat{P}_{abb}$

$$\hat{\mathcal{J}}_{[ab]} = \frac{1}{4} \left(\hat{P}_{acd} \hat{M}_{bcd} - \hat{P}_{bcd} \hat{M}_{acd} \right)$$

$$\hat{\mathcal{D}} = \frac{1}{6} \hat{P}_{abc} \hat{M}_{abc} + i \lambda_D$$

拘束条件のエルミート性の要求より

$$\lambda_H = \frac{(N+2)(N+3)}{2} \quad \lambda_D = \frac{N(N+1)(N+2)}{2}$$

拘束系代数は量子化されても変化しない。

$$[\hat{\mathcal{H}}(T^1), \hat{\mathcal{H}}(T^2)] = i\hat{\mathcal{J}}([\hat{T}^1, \hat{T}^2])$$

$$[\hat{\mathcal{J}}(V), \hat{\mathcal{H}}(T)] = i\hat{\mathcal{H}}(VT)$$

$$[\hat{\mathcal{J}}(V^1), \hat{\mathcal{J}}(V^2)] = i\hat{\mathcal{J}}([V^1, V^2])$$

$$[\hat{D}, \hat{\mathcal{H}}(T)] = i\hat{\mathcal{H}}(T)$$

$$[\hat{D}, \hat{\mathcal{J}}(V)] = 0$$

$$\hat{T}_{bc} = T_a \hat{P}_{abc}$$

$$\hat{\mathcal{J}}(\hat{V}) = \hat{V}_{[ab]} \hat{\mathcal{J}}_{[ab]}$$

$$(\because [\hat{P}_{abc} \hat{P}_{bde} \hat{M}_{cde}, \hat{P}_{a'b'b'}] - (a \leftrightarrow a') = 4i\hat{P}_{abc} \hat{P}_{a'bc} + 2i\hat{P}_{aa'b} \hat{P}_{bcc} - (a \leftrightarrow a') = 0)$$

量子化されても第一種拘束系であり、量子化された拘束条件は互いに無矛盾。

WHEELER-DEWITT 方程式

- Wheeler-DeWitt 方程式

$$\hat{\mathcal{H}}_a \Psi = \hat{\mathcal{J}}_{[ab]} \Psi = \hat{\mathcal{D}} \Psi = 0 \quad \Psi: \text{“宇宙”の波動関数}$$

- P表示において、互いに無矛盾な連立一階偏微分方程式系を与える。

$$\Psi = \Psi(P_{abc}),$$

$$\hat{P}_{abc} = P_{abc},$$

$$\hat{M}_{abc} = i\Delta(abc) \frac{\partial}{\partial P_{abc}},$$

$$\Delta(abc) = \begin{cases} 6 & \text{for } a = b = c, \\ 2 & \text{for } a = b \neq c, b = c \neq a, c = a \neq b, \\ 1 & \text{for } a \neq b, b \neq c, c \neq a. \end{cases}$$

少なくとも局所的には解が存在する。 (特異な点を除いて)

(Frobenius theorem)

N=2の場合の厳密解

▶ N=2 のとき、#自由度 = #拘束条件 = 4。解は唯一に決まる。

▶ 拘束条件の数

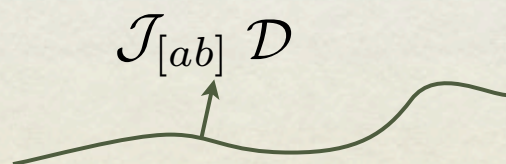
$\mathcal{H}_a$ 2つ

$\mathcal{J}_{[ab]}$ so(2)生成子 1つ

$\mathcal{D}$ 1つ

▶ 解法

2次元部分空間上でまず解き、 $\mathcal{J}_{[ab]}$ と $\mathcal{D}$ の方向に解を拡張する。



いわゆるゲージ固定と同じ。

▶ 2次元部分空間

$$P_{111} = 1$$

$$P_{112} = 0$$

$$P_{122} = x_1$$

$$P_{222} = x_2$$

▶ 連立一階偏微分方程式

$$\left[\frac{\partial}{\partial P_{111}} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2 \right] \Psi = 0$$

$$\left[(1 - 2x_1) \frac{\partial}{\partial P_{112}} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 3x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right] \Psi = 0$$

$$\left[3 \frac{\partial}{\partial P_{111}} + x_1(1 + 2x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + 3x_1x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 5(1 + x_1) \right] \Psi = 0$$

$$\left[x_1(1 + 2x_1) \frac{\partial}{\partial P_{112}} + 3x_1x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 3(x_1^2 + x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_2} + 5x_2 \right] \Psi = 0$$

▶ $\frac{\partial \Psi}{\partial P_{111}}, \frac{\partial \Psi}{\partial P_{112}}$ を消去。(ゲージ固定するとその共役変数も固定される。)

$$\left[2x_1(x_1 - 1) \frac{\partial}{\partial x_1} + 3x_2(x_1 - 1) \frac{\partial}{\partial x_2} + 5x_1 - 1 \right] \Psi = 0$$

$$\left[4x_1x_2(x_1 - 1) \frac{\partial}{\partial x_1} + 3(4x_1^3 + 2x_1x_2^2 - x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_2} + 5x_2(2x_1 - 1) \right] \Psi = 0$$

▶ 非微分項を消去

$$\left[x_1x_2(x_1 - 1) \frac{\partial}{\partial x_1} + 2(5x_1^4 - x_1^3 + 2x_1x_2^2 - x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right] \Psi = 0$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{2(5x_1^4 - x_1^3 + 2x_1x_2^2 - x_2^2)}{x_1x_2(x_1 - 1)} \text{ に沿って、}\Psi \text{ は一定。}$$

$$\downarrow$$
$$\frac{d}{dx_1} x_2^2 = \frac{4(2x_1 - 1)}{x_1(x_1 - 1)} x_2^2 + \frac{4x_1^2(5x_1 - 1)}{x_1 - 1} \longrightarrow a_0 = \frac{4x_1^3 + x_2^2}{x_1^4(x_1 - 1)^4}$$

$$\therefore \Psi = f \left(\frac{4x_1^3 + x_2^2}{x_1^4(x_1 - 1)^4} \right) \quad \text{元に代入すれば、} f(x) \propto \sqrt{x}。$$

▶最終形

$$\Psi = b_0 \frac{\sqrt{4x_1^3 + x_2^2}}{x_1^2(x_1 - 1)^2}$$



$\mathcal{I}_{[ab]}$ $\mathcal{D}$ 不変な形

$$= c_0 \frac{\sqrt{\epsilon_{ac}\epsilon_{bd}\epsilon_{eg}\epsilon_{fh}\epsilon_{e'g'}\epsilon_{f'h'}P_{aef}P_{bgh}P_{ce'f'}P_{dg'h'}}}{P_{acd}P_{bde}P_{bef}P_{afc} - P_{acd}P_{bde}P_{aef}P_{bfc}}$$

▶物理的解釈

●分母＝ファジー空間の局所性の計量 l そのもの
 $l = 0$ で波動関数が発散する。

局所性を持つファジー空間がfavorされる。

●分子＝0 は特異で、配位空間の境界を作る。

縮退した配位：分子＝0 $\longleftrightarrow \exists f \star f = 0$

宇宙の始まり (?)

まとめ

- Canonical Tensor ModelはWheeler-DeWitt流に無矛盾に量子化できる。
- $N=2$ の場合には、厳密に“宇宙”の波動関数が求まる。局所性を満たすファジー空間がfavorされる。また、配位空間に特異性をもつ境界（宇宙の始まり？）がある。

やりたいこと

- $N > 2$ の場合の波動関数を調べ、局所性や配位空間の境界の存在がどうか見る。

$$\Psi \sim \frac{\text{Regular around } l = 0}{l} \quad ?$$

- $N > 2$ の場合には、配位空間内に対称性の残る点がある。対称性がfavorされるかどうか調べる。Group Field Theory との関係。

$$P_{abc} = J_a^{a'} J_b^{b'} J_c^{c'} P_{a'b'c'}, \quad J \in O(N)$$

- 一般相対論との関係 ド・ジッター時空

Raffaelli, Sato, NS

● ファジー空間の積による局所ハミルトニアン of 自然な表現

Raffaelli, Sato, NS

● 振動や運動がどのようにして生じるのか？ 観測量の問題。

cf. Rovelli: complete observable

ヒント (?)

拘束条件 $\partial\Psi = 0 \longrightarrow \Psi = \text{const.}$ 一つまらない。

テンソル模型には変数が沢山ある。拘束条件が一階微分で表される事を使うと、もっと面白い解が沢山ある。

$$\Psi = \Psi_1(x_1)\Psi_2(x_2) \longrightarrow \partial\Psi_1(x_1)\Psi_2(x_2) + \Psi_1(x_1)\partial\Psi_2(x_2) = 0$$

例えば、 $\Psi_1(x_1) = e^{ipx_1}$
 $\Psi_2(x_2) = e^{-ipx_2}$ が解。

$x_2 = t$ を時間と思えば、

$$\Psi = e^{ip(x_1-t)}$$

または

$$\Psi = \frac{\Psi_1}{\Psi_2}$$

$$\partial\Psi_1 = ip\Psi_1$$

$$\partial\Psi_2 = ip\Psi_2$$

●物質場はどうやって生じるか。局所ハミルトニアンの唯一性。

新たな自由度？

創発現象？

●ラグランジュ形式

第一種拘束条件→ゲージ対称性

一般相対論：時空の一般座標変換不変性

テンソル模型：？