

Twisted volume reduction in large N QCD

M. Okawa with A. Gonzalez-Arroyo

ラージN QCDの時空縮約モデルを、twist境界条件のもとで考える

話の内容

- 1) Twisted Eguchi Kawai model
- 2) Large N QCD with $N_f = 2$ adjoint quark
- 3) Large N QCD with $N_f = 1$ adjoint quark

Plan of talk

- Twisted Eguchi-Kawai model
for pure $SU(N)$ gauge theory
- large N QCD with two adjoint fermions
- large N QCD with one adjoint fermion

● Eguchi-Kawaiモデル(1982年)

Eguchi-Kawaiモデルは通常のWilson gauge theoryからリンク変数の時空依存性を無視して得られる。

$$Z_W = \int \prod_{x,\mu} dU_{x,\mu} \exp \left\{ -bN \sum_x \sum_{\mu \neq \nu=1}^d \text{Tr} \left(I - U_{x,\mu} U_{x+\mu,\nu} U_{x+\nu,\mu}^\dagger U_{x,\nu}^\dagger \right) \right\}$$

$$U_{x,\mu} \rightarrow U_\mu \quad \rightarrow \downarrow$$

$$Z_{EK} = \int \prod_{\mu} dU_{\mu} \exp \left\{ -bN \sum_{\mu \neq \nu=1}^d \text{Tr} \left(I - U_{\mu} U_{\nu} U_{\mu}^\dagger U_{\nu}^\dagger \right) \right\}, \quad b = \frac{1}{g^2 N}$$

同様にWilson loopも次のように定義される。

$$W_W(C) = \left\langle \text{Tr} \left(U_{x,\mu} U_{x+\mu,\nu} \cdots U_{x-\rho,\rho} \right) \right\rangle$$

$$W_{EK}(C) = \left\langle \text{Tr} \left(U_{\mu} U_{\nu} \cdots U_{\rho} \right) \right\rangle$$

Eguchi、Kawai は、EKモデルの持つ $(Z(N))^4$ 対称性

$$U_\mu \longrightarrow e^{i\theta_\mu} U_\mu$$

が自発的に破れていなければ、large N limit で、Wilson loopが満たす運動方程式 (SD-equation) が2つの理論で等しくなることを示した。

2つの理論の運動方程式はopen loopの期待値を除いて等しい。

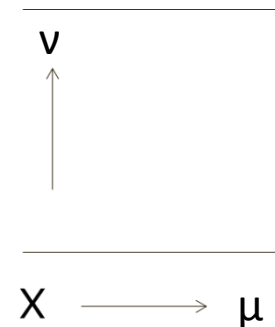
通常のWilson gauge theoryでは、open loopの期待値はlocal gauge不変性により、0になる。

$$\left\langle \text{Tr}(U_{x,\mu} U_{x+\mu,\nu} U_{x+\nu,\mu}^\dagger) \right\rangle = 0$$

一方、Eguchi-Kawaiモデルの作用は $U_\mu \longrightarrow e^{i\theta_\mu} U_\mu$ の変換に対して不変なので、この対称性が自発的に破れていなければ、open loopの期待値は0になる。

$$\langle \text{Tr} U_\mu U_\nu U_\mu^\dagger \rangle = e^{i\theta_\nu} \text{Tr} \langle U_\mu U_\nu U_\mu^\dagger \rangle$$

$$\therefore \langle \text{Tr}(U_\mu U_\nu U_\mu^\dagger) \rangle = 0$$



しかし、Bhanot, Heller, Neuberger はこの対称性が自発的に破れていることを示した。(1982年)

作用を 0 にする configuration $U_\mu^{(0)}$ は次の関係式を満たす。

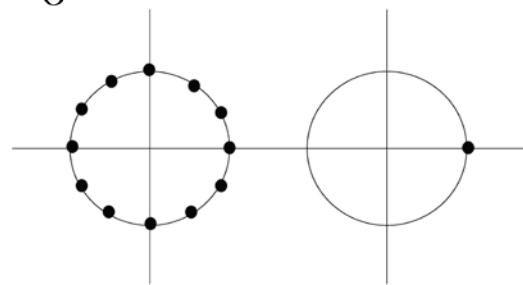
$$\text{Tr}(I - U_\mu^{(0)} U_\nu^{(0)} U_\mu^{(0)\dagger} U_\nu^{(0)\dagger}) = 0$$

$$\therefore U_\mu^{(0)} U_\nu^{(0)} = U_\nu^{(0)} U_\mu^{(0)}$$

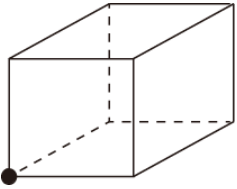
従って $U_\mu^{(0)}$ は、対角行列になる。その固有値を $e^{i\theta_\alpha} (\alpha=1, N)$ とすると、Bhanot, Heller, Neuberger は、弱結合相では θ_α は、ばらばらの値を取るより、同じ値をとる方が安定であることを示した。

従って $U_\mu^{(0)}$ は、単位行列に比例しており $\text{Tr} U_\mu^{(0)} \neq 0$

$(Z(N))^4$ 対称性は弱結合相で破れてしまう。



● Twisted Eguchi-Kawaiモデル(1983年)



Eguchi-Kawaiモデルは、格子点が1点の通常のWilson gauge theoryに周期的境界条件を課したものと考えられる。

Gonzalez-Arroyo, Okawa は周期的境界条件の代わりに、twisted境界条件を課した twisted EK モデルを考えた。具体的には、 L を正の整数として $SU(N=L^2)$ を考える

$$S_{TEK} = bN \sum_{\mu \neq \nu=1}^d \text{Tr} \left(I - Z_{\mu\nu} U_{\mu} U_{\nu} U_{\mu}^{\dagger} U_{\nu}^{\dagger} \right)$$

$$Z_{\mu\nu} = \exp \left(k \frac{2\pi i}{L} \right), \quad Z_{\nu\mu} = -Z_{\mu\nu}, \quad \mu > \nu$$

$$k, L : \text{co-prime}, \quad k/L \text{ fixed as we go } N = L^2 \rightarrow \infty$$

$$\text{Tr} \left(I - z_{\mu\nu} U_{\mu}^{(0)} U_{\nu}^{(0)} U_{\mu}^{(0)\dagger} U_{\nu}^{(0)\dagger} \right) = 0$$

$$\therefore U_{\nu}^{(0)} U_{\mu}^{(0)} = z_{\mu\nu} U_{\mu}^{(0)} U_{\nu}^{(0)}$$

具体的に Γ_μ は、't Hooft matrices P_L, Q_L から作ることができる

$$P_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & z & & & \\ & & z^2 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & z^{L-1} \end{pmatrix}, \quad z = \exp\left(\frac{2\pi i}{L}\right)$$

$$P_L Q_L = z Q_L P_L$$

$P_L, Q_L : L \times L$ 行列

$$\Gamma_1 = P_L \otimes I_L$$

$$\Gamma_2 = Q_L^k \otimes P_L$$

$$\Gamma_3 = Q_L^k \otimes P_L Q_L^k$$

$$\Gamma_4 = Q_L^k \otimes Q_L^k$$

$\Gamma_\mu : N \times N$ 行列、 $N = L^2$

$$\Gamma_\nu \Gamma_\mu = z^k \Gamma_\mu \Gamma_\nu, \quad \mu > \nu$$

$Z(L)^4$ 対称性 $U_\mu \rightarrow zU_\mu$ のオーダーパラメーターは

$$\langle \text{Tr}(U_\mu^\ell) \rangle, \quad \ell = 1 \sim (L-1)$$

classical vacuum $U_\mu^{(0)} = \Gamma_\mu$ に対して

$$\text{Tr}(U_\mu^{(0)\ell}) = \text{Tr}(\Gamma_\mu^\ell) = 0, \quad \ell = 1 \sim (L-1)$$

TEK model と格子ゲージ理論の満たす運動方程式 (SD equation) は large N limit で等しくなる。

したがって、2つの理論は非摂動的に等価であると考えられる。

A. Gonzalez-Arroyo and M. O. (1983年) $k = 1$

Nが有限なTEK modelのプロパゲーターは、有限の体積 $V = L^4 = N^2$ を持つ格子ケージ理論のプロパゲーターと一致する。 N^2 はSU(N)行列の自由度。

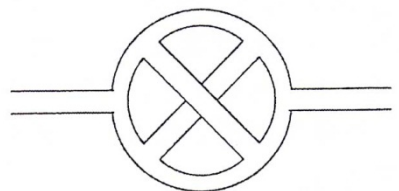
相互作用があると、すべての vertex に外線の運動量に依存した phase factor が現れる。

Planar diagramでは、これらのphase factor は完全にキャンセルする。

Non-planar diagram ではphase factor は残るが、large N limit で、phase factor は激しく振動し Non-planar diagram からの寄与をサプレスさせる。



no phase factor remains

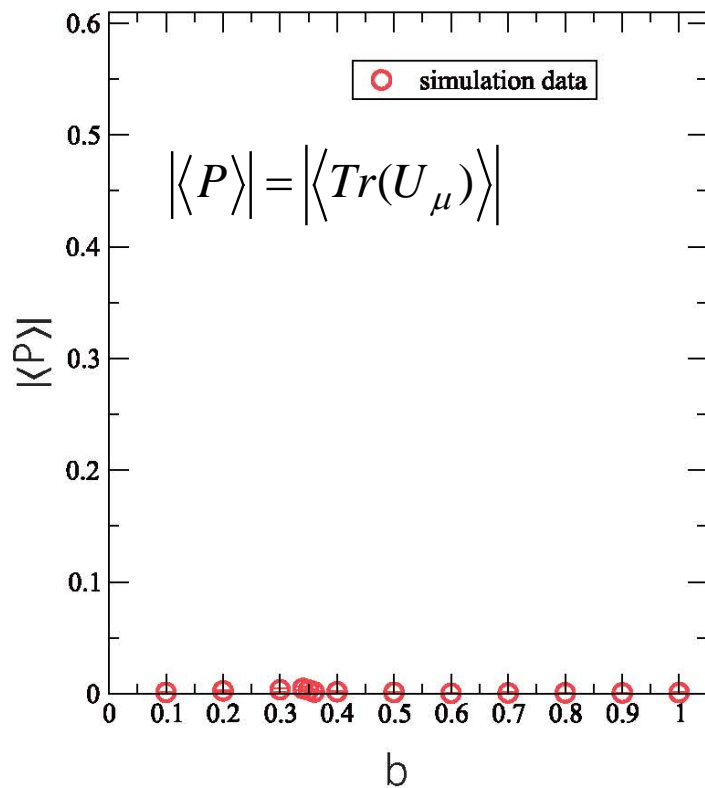


$$\int dp \exp[i\bar{k} L f(p)] \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

$$k\bar{k} = 1 \pmod{L}$$

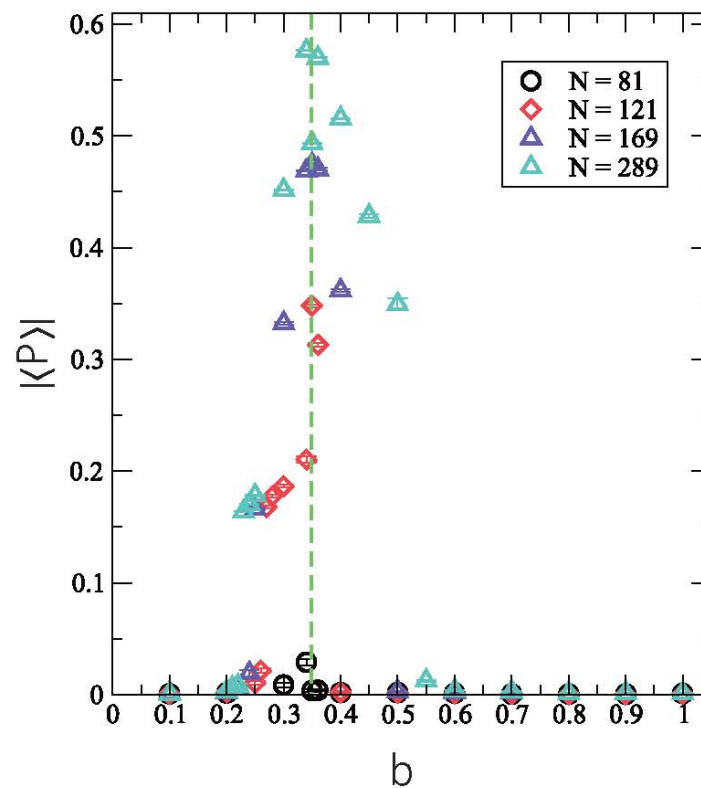
2003年、T. Ishikawa と M. O は $N > 100$ 、 $k=1$ の時、
 中間結合領域で $\langle \text{Tr}(U_\mu) \rangle \neq 0$ となることを発見した。

$N=64, k=1$



Z_L^4 symmetry is not broken
 all over the coupling region.

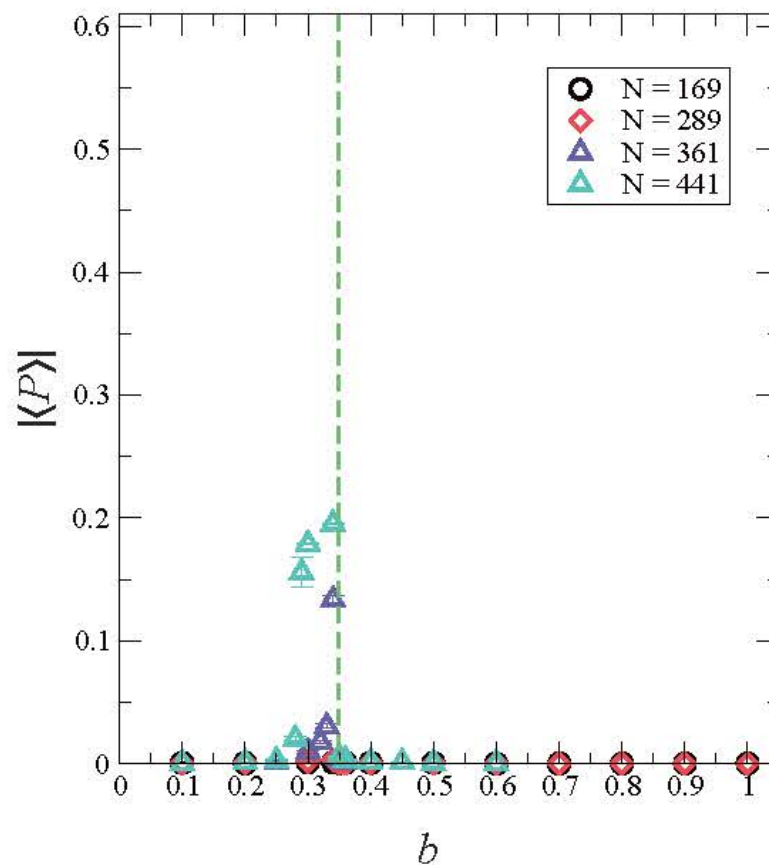
$k=1$



Z_L^4 symmetry is broken in the
intermediate region for $N > 100$

さらに、 $k=2$ の時は
 $Z(L)^4$ 対称性は $N \geq 360$
で破れる。

$k=2$



Z_L^4 symmetry is broken in the
intermediate region for $N \gtrsim 360$.

なぜ $Z(L)^4$ は破れるのか？

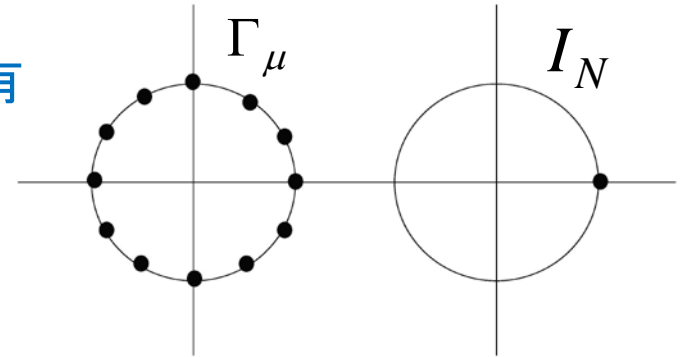
M. Teper, H. Vairinhops (2007) $k=1$

A. Gonzalez-Arroyo, M. O. (2010) **general k**

$Z(L)^4$ 対称性が破れている相では、 U_μ の固有値は、互いに引合い同じ値を持つ。

結果的に

$$U_\mu^{(0)} \sim I_N$$



2つのconfiguration Γ_μ と I_N のどちらが実現するかは
energy gap と **entropy** との競合で決まる

$$F(U_\mu^{(0)} = \Gamma_\mu) = \frac{3}{2} \log(bN) N^2$$

$$F(U_\mu^{(0)} = I_N) = 12bN^2 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi k}{L} \right) \right) + \log(bN) N^2$$

$$\begin{aligned}\Delta F &\equiv F(U_\mu^{(0)} = I_N) - F(U_\mu^{(0)} = \Gamma_\mu) \\ &= 12bN^2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{L}\right) \right) - \frac{1}{2} \log(bN) N^2\end{aligned}$$

- L, N, k を固定し $b \rightarrow \infty$ としたとき、 $\Delta F > 0$ (weak coupling limit)
- b, k を固定し $N = L^2 \rightarrow \infty$ としたとき、 $\Delta F \sim -N^2 / 2 < 0$

wrong vacuum $U_\mu^{(0)} = I_N$ が実現してしまう

我々のプロポーザル

k/L を固定しながら、 $N = L^2 \rightarrow \infty$ の極限をとる。

ただし k と L は互いに素

同時に $b \sim (11/48\pi^2) \log(N)$ とする。

すると、物理的なサイズ $La(b)$ は固定される。

ここまでは摂動論的な議論であり、あまり信用できない。
非摂動論的な研究が必要である。

$k = 0$: $Z(L)$ 対称性は $L > 0$ の時破れる

$k = 1$: $Z(L)$ 対称性は $L > 10$ の時破れる

$k = 2$: $Z(L)$ 対称性は $L > 18$ の時破れる

$k = 3$: $Z(L)$ 対称性は $L > 28$ の時破れる

$k = 4$: $Z(L)$ 対称性は $L > 37$ の時破れる

この数値シミュレーション結果は以下のことを示唆している。

$Z(L)^4$ 対称性は $\frac{k}{L} > \frac{1}{9}$ の時、破れない。

しかし、同時に k はあまり大きく取りすぎてはいけない。

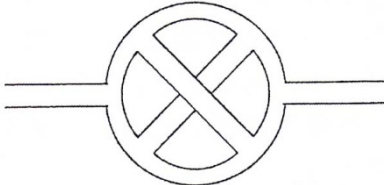
実際 $k = \frac{L-1}{2}$ の時、 L を 17, 19, 21, 23 と取ると

$$\langle \text{Tr}(U_\mu) \rangle = 0 \quad \text{しかし} \quad \langle \text{Tr}(U_\mu^2) \rangle \neq 0$$

この場合、 $2k = L-1 = 1 \pmod{L}$, つまり $\bar{k} = 2$ $[k\bar{k} = 1 \pmod{L}]$

Non-commutative field theory の tachyonic instability
と関係しているかもしれない？

いずれにしても、 \bar{k} を大きな値にとるのは、
non planer diagrams をサプレスさせるにも望ましい。


$$\int dp \exp[i\bar{k} L f(p)] \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

$k/L > 1/9$ とし、 \bar{k} を大きく保ったまま L を無限大に持って行く。
ただし L と k は互いに素。

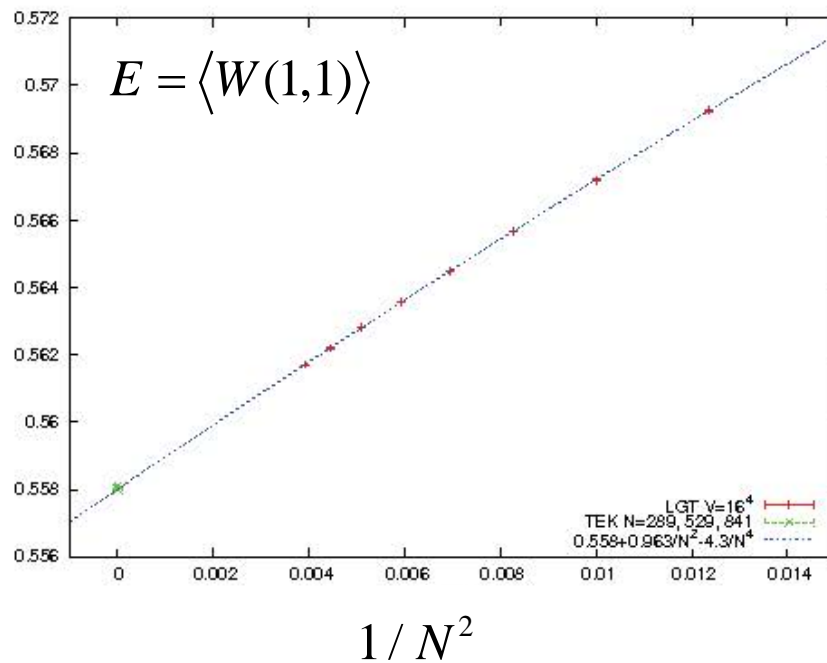
我々の計算は主に次のパラメーターセットで行った。

N	L	k	\bar{k}
289	17	5	7
529	23	7	10
841	29	9	13
1369	37	11	10

結果として、すべての場合に $k/L \sim 0.3$ となっている。

N dependence of $W(1,1)$

Detailed comparison at $b=0.36$



For $V = 16^4$ $N = 9-16$

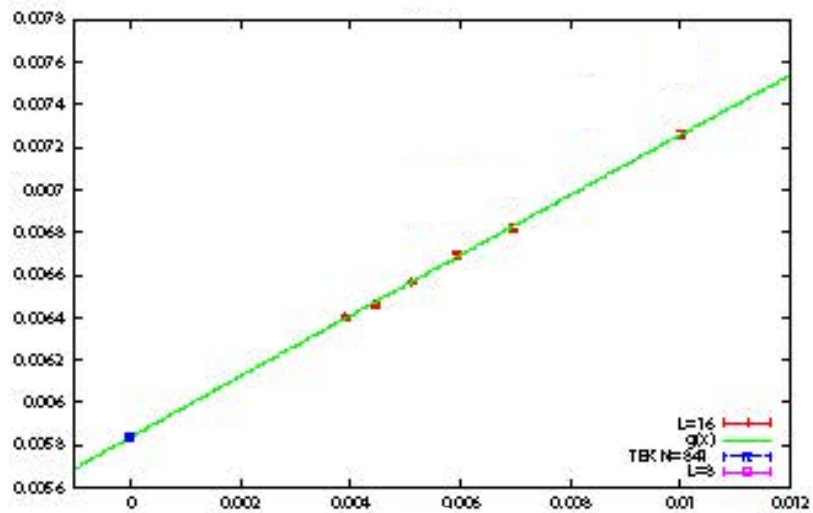
$$E = 0.55800(2) + \frac{0.963(6)}{N^2} - \frac{4.3(4)}{N^4}$$

$$E = 0.557998(5) \quad (N=841, k=9)$$

$$E = 0.557999(19) \quad (N=289, k=5)$$

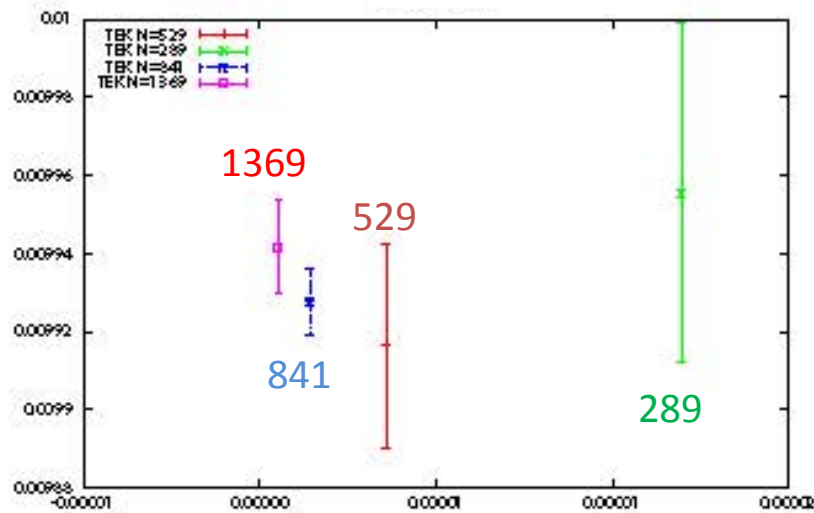
$$E = 0.557991(13) \quad (N=529, k=7)$$

$\langle W(4,4) \rangle$ $b = 0.36$



$1/N^2$

$\langle W(4,4) \rangle$ *TEK* $b = 0.37$



$1/N^2$

TEKモデルが非摂動論的に正しいとすれば、連続理論での弦定数が計算できるはずである。

TEKモデルでは、Wilson loop $W(R, T)$ は次のように定義される。

$$W(R, T) = Z_{\mu\nu}^{RT} \left\langle \text{Tr} \left(U_{\mu}^R U_{\nu}^T U_{\mu}^{\dagger R} U_{\nu}^{\dagger T} \right) \right\rangle \sim \sigma RT + \dots$$

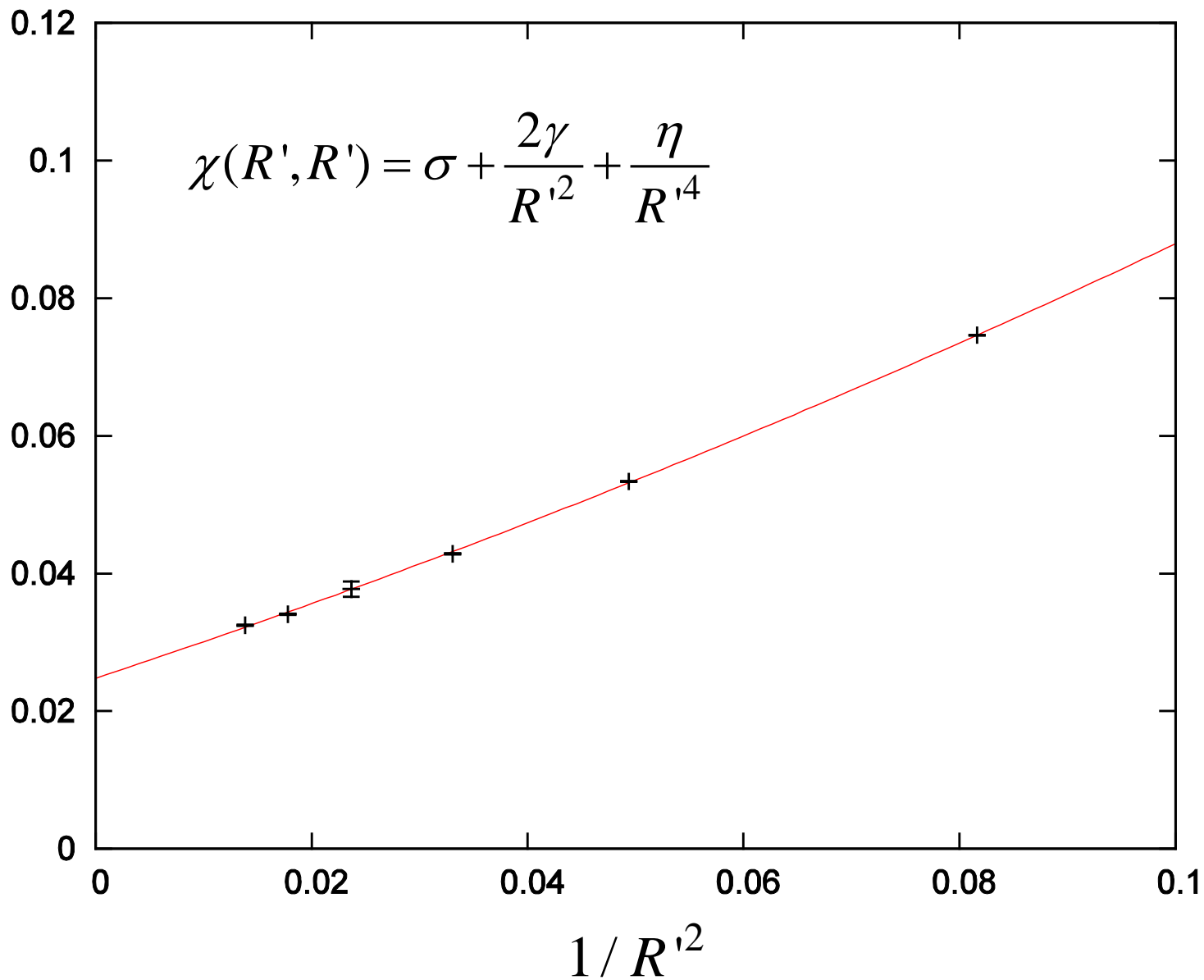
従って、弦定数 σ は Creutz ratio $\chi(R', T')$ から次のように求められる

$$\chi(R', T') = -\log \frac{W(R'+0.5, T'+0.5)W(R'-0.5, T'-0.5)}{W(R'+0.5, T'-0.5)W(R'-0.5, T'+0.5)}$$

$$\chi(R', R') = \sigma + \frac{2\gamma}{R'^2} + \frac{\eta}{R'^4}$$

ここで R', T' は半整数。

$\chi(R',R')$, $N=841$, $b=0.37$



連続理論での弦定数を求めるため、TEKモデルで $N = 841 = 29^2$
 $k = 9$ とし、't Hooft カップリングの逆 b を6点取って、連続極
限をとった。

$$b = 0.36, 0.365, 0.37, 0.375, 0.38, 0.385$$

このシステムは時空体積が $V = 29^4$ の通常の格子ゲージ理論
に対応している。

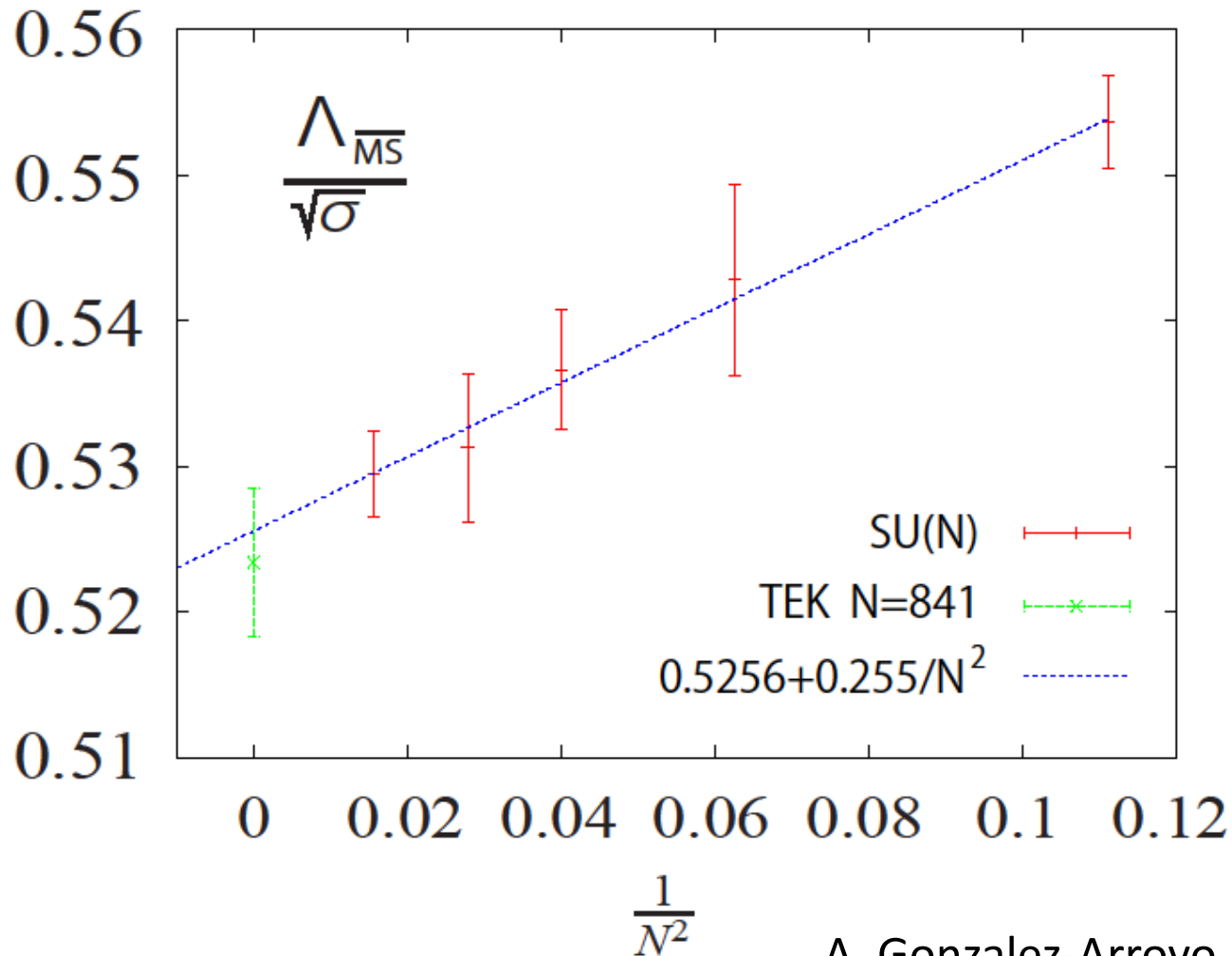
比較のため、通常のSU(N)格子ゲージ理論で $V = 32^4$ 格子上で、

$$N = 3, 4, 5, 6, 8$$

として連続理論の弦定数を求めた。

連続理論での弦定数 $\Lambda_{\overline{MS}} / \sqrt{\sigma}$ の比較

TEK model with $N = 841 = 29^2$ and LGT with $N = 3, 4, 5, 6, 8$



Plan of the talk

- Twisted Eguchi-Kawai model
for pure $SU(N)$ gauge theory
- large N QCD with two adjoint fermions
- large N QCD with one adjoint fermion

Large N QCD with $N_f = 2$ adjoint fermions

2つのアジョイントフェルミオンを持つSU(N)ゲージ理論はNの値に関係なくコンフォーマルな理論だと思われる。

実際、くりこみ群の β 関数を、't Hooft カップリング $\lambda = g^2 N$ で展開した時の最初の2つ係数はNによらない。

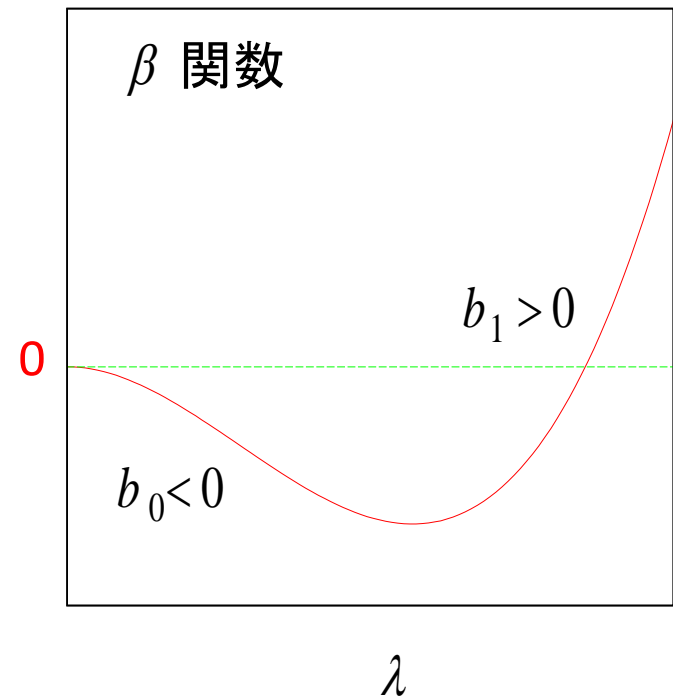
$$b_0 = \frac{4N_f - 11}{24\pi^2}, \quad b_1 = \frac{16N_f - 17}{192\pi^4}$$

● asymptotic free

$$b_0 < 0 \rightarrow N_f < \frac{11}{4} = 2.75$$

● infrared fixed point

$$b_1 > 0 \rightarrow N_f > \frac{17}{16} = 1.08$$



- Twisted reduced model of large N QCD
with two adjoint Wilson fermions

ゲージ群として $SU(N)$, $N = L^2$ を考える

$$S = bN \sum_{\mu \neq \nu=1}^d \text{Tr} \left(Z_{\mu\nu} U_\mu U_\nu U_\mu^\dagger U_\nu^\dagger \right) + \sum_{j=1}^{N_f} \bar{\psi}_j D_W \psi_j$$

$$Z_{\mu\nu} = \exp \left(k \frac{2\pi i}{L} \right), \quad Z_{\nu\mu} = Z_{\mu\nu}^*, \quad \mu > \nu$$

$$D_W = 1 - \kappa \sum_{\mu=1}^4 \left[(1 - \gamma_\mu) U_\mu^{adj} + (1 + \gamma_\mu) U_\mu^{\dagger adj} \right], \quad U_\mu^{adj} \psi_j = U_\mu \psi_j U_\mu^\dagger$$

$$k, L : \text{互いに素}, \quad m_0 = (1/\kappa - 1/\kappa_c) / 2$$

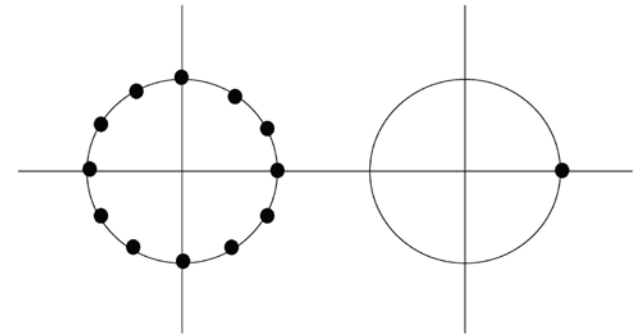
$k = 0$ 周期的境界条件に対応している

$k \neq 0$ twist 境界条件に対応している

フェルミオンを含まない Eguchi-Kawai model ($k=0$) で $Z(N)$ 対称性が破れるのは、 U_μ の固有値間に引力が働き合い、結果として

$$U_\mu^{(0)} \sim I_N$$

となることに起因している。



Kovtun, Unsal, Yaffe および Bringoltz, Koren, Sharpe は

アジョイントフェルミオンの動的効果は U_μ の固有値間に斥力を生じさせ、その結果 $k=0$ の理論でも $Z(N)$ 対称性は破れないことを示した。

しかし、 $k=0$ の理論は非常に大きな finite N corrections を持つてしまう

A. Gonzalez-Arroyo & M. O. (2013)

Finite N correction を調べるため、 $SU(N)$, $N = L^2$ で N を

$$N = 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289$$

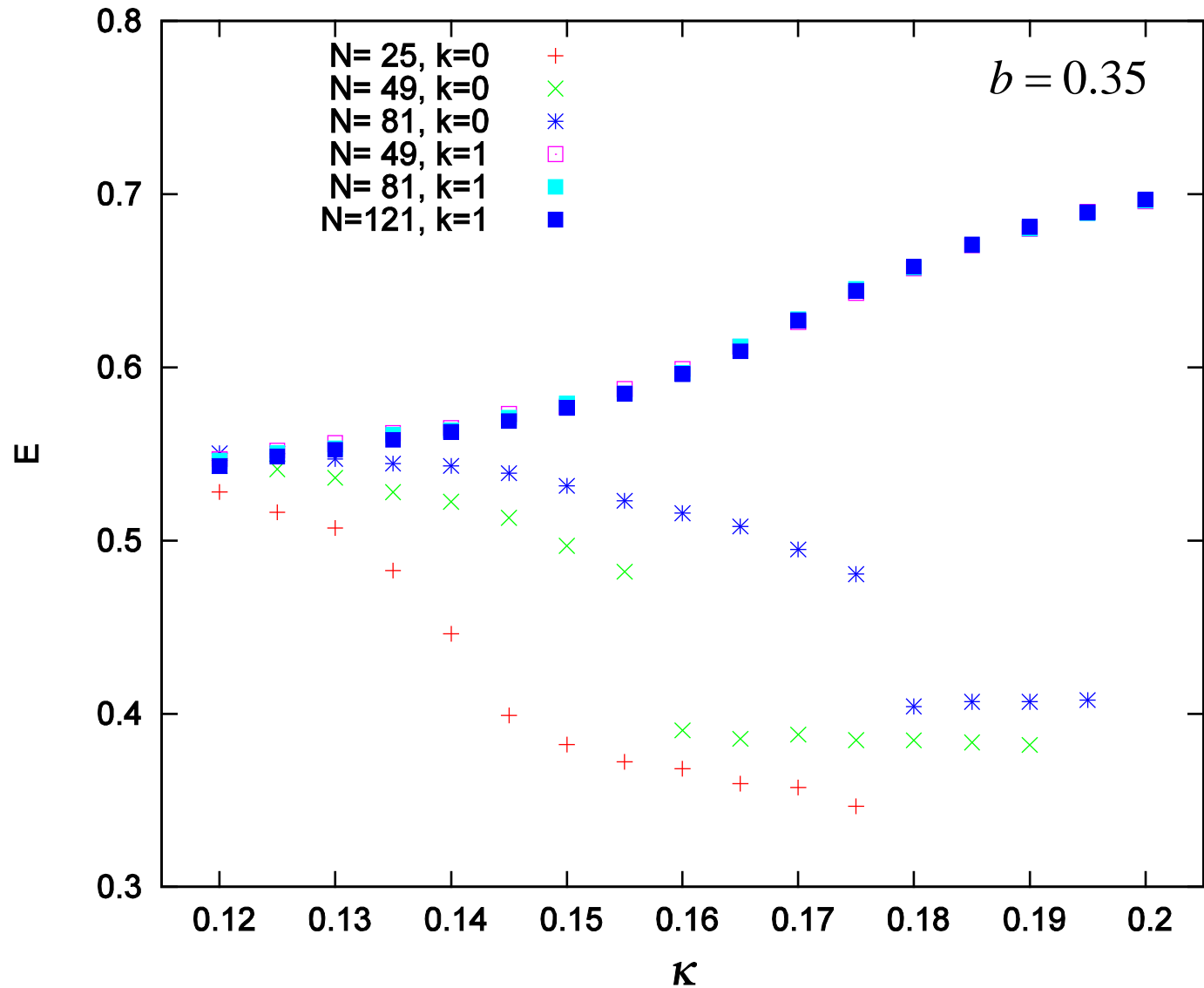
$$(L = 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17)$$

と変化させながらシミュレーションを行ない、内部エネルギー

$$E = Z_{\mu\nu} \left\langle \text{Tr}(U_{\mu} U_{\nu} U_{\mu}^{\dagger} U_{\nu}^{\dagger}) \right\rangle$$

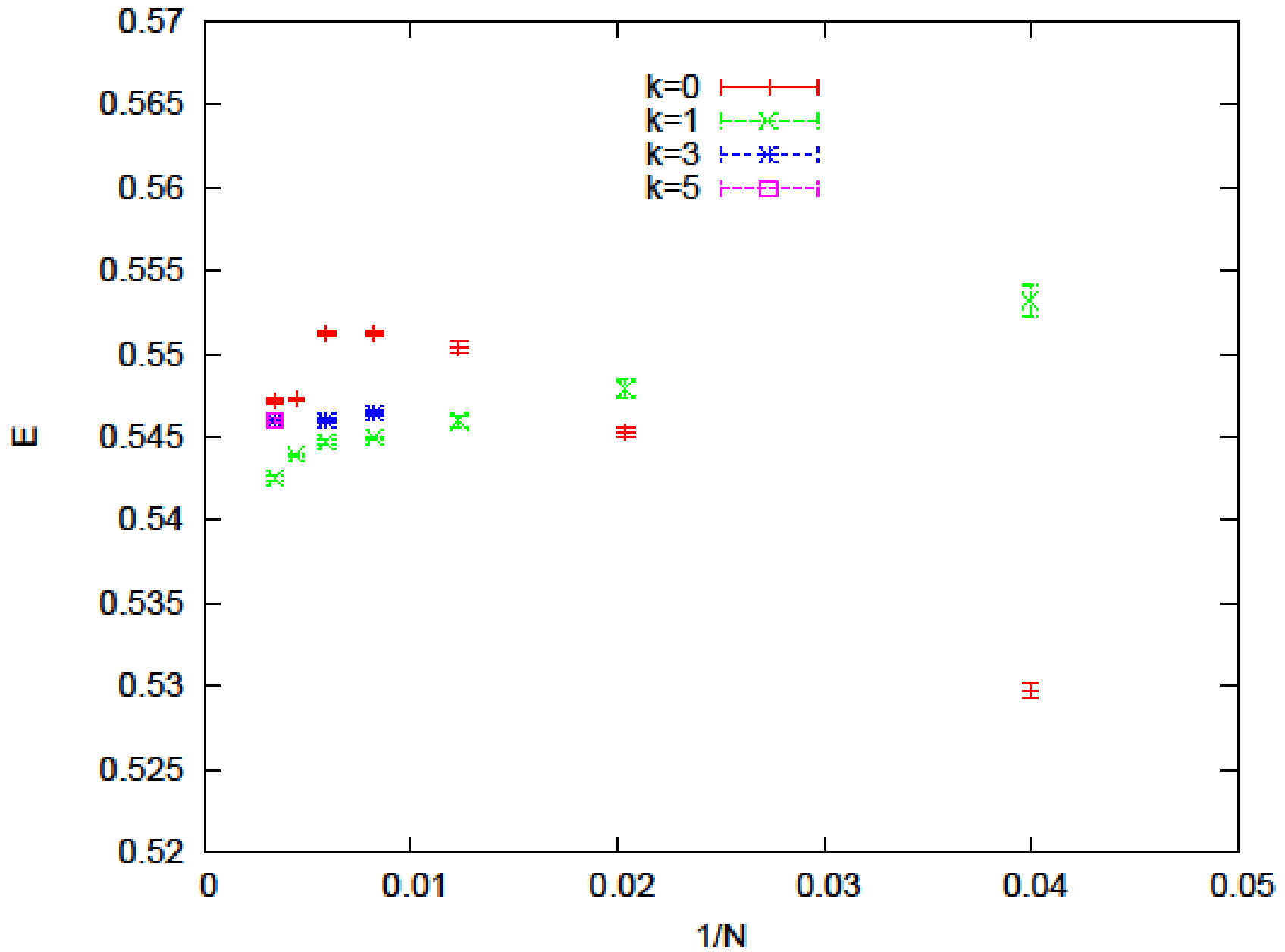
を計算した。

$$E = Z_{\mu\nu} \left\langle \text{Tr}(U_{\mu} U_{\nu} U_{\mu}^{\dagger} U_{\nu}^{\dagger}) \right\rangle$$

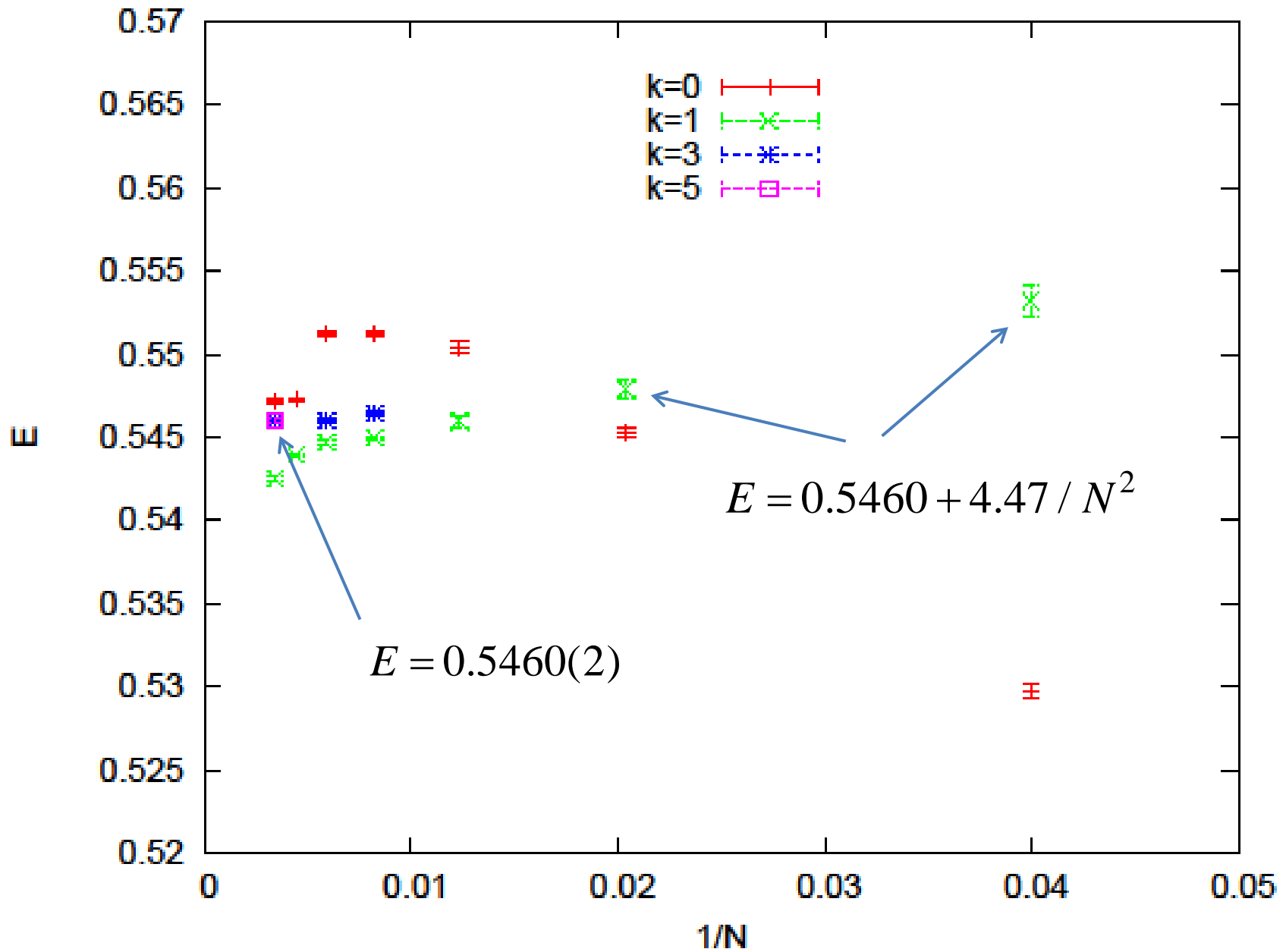


$$m_0 = (1/\kappa - 1/\kappa_c) / 2$$

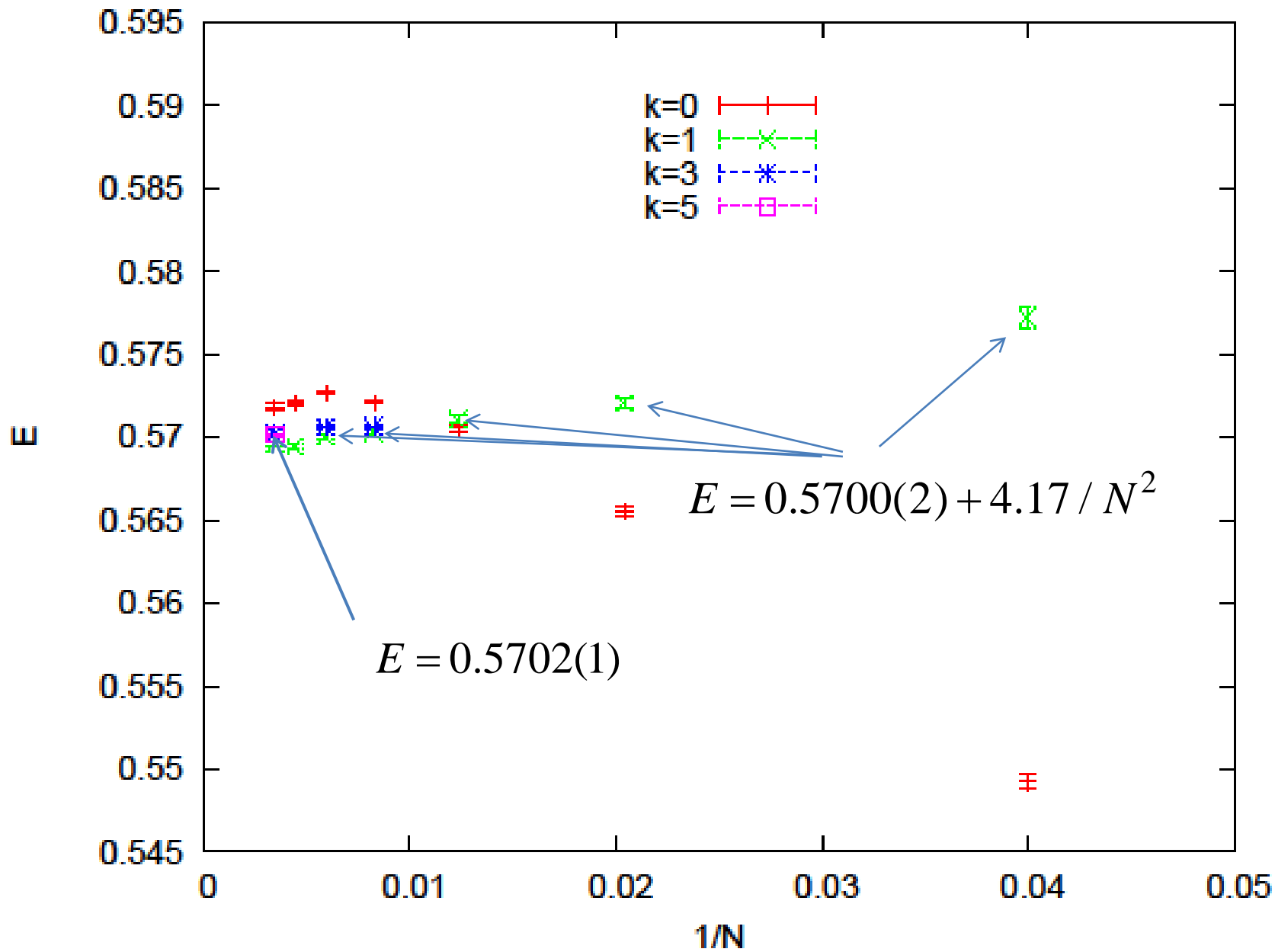
b=0.35, kappa=0.12



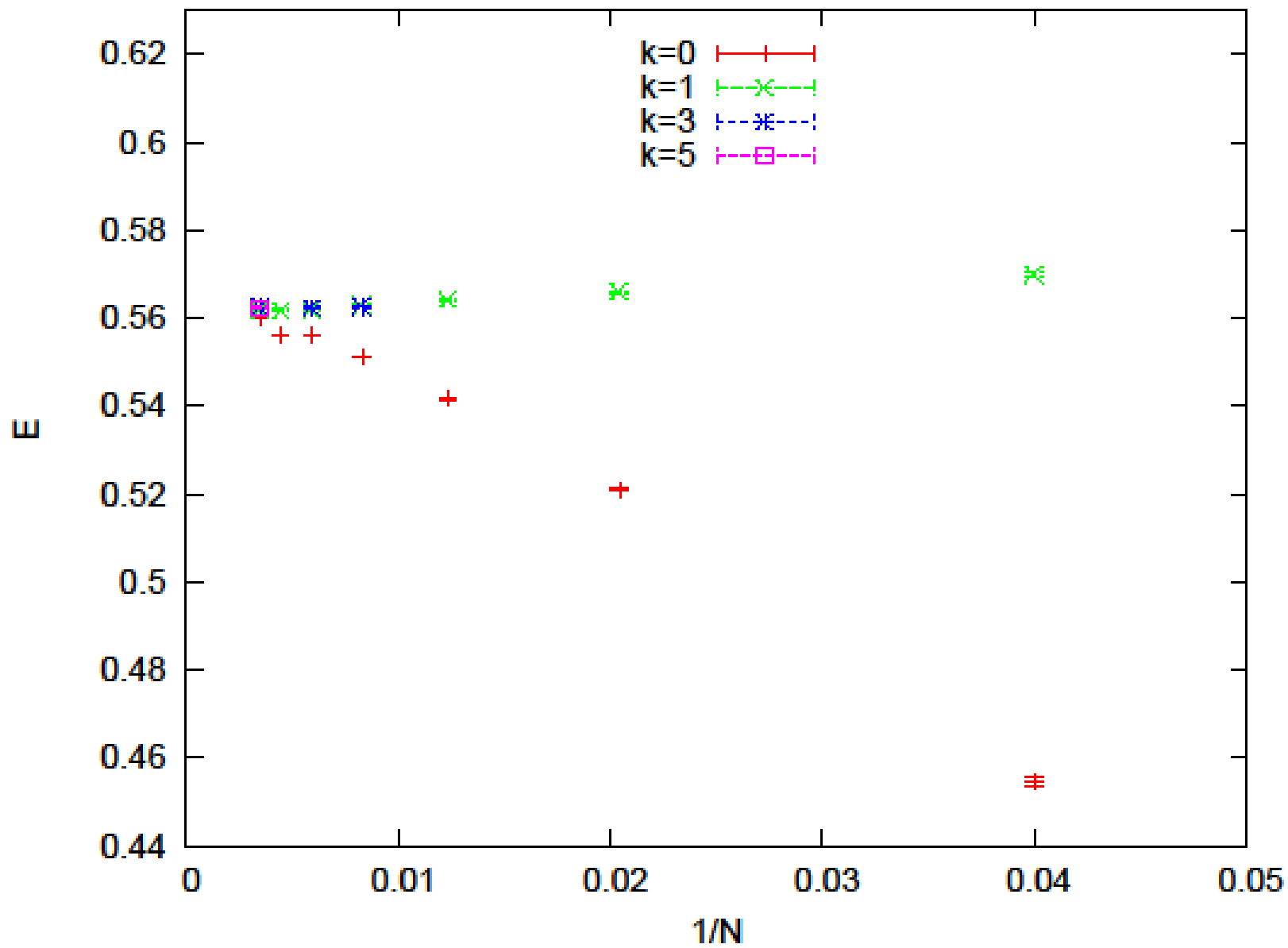
b=0.35, kappa=0.12



b=0.36, kappa=0.12



b=0.35, kappa=0.14



Twist 境界条件 ($k \neq 0$) のもとでの finite N correction

- 周期的境界条件 ($k = 0$) に比べ、著しく小さい
- pure gauge theory で対称性の破れが起こる N の値を N_c とすると、 $N < N_c$ の時、finite N correction は

$$a + b / N^2 + \dots$$

となる。

弦定数の計算

$N = 289 = 17^2$, $k = 5$ とし、2つの b の値 $b = 0.35, 0.36$ で K を変えながら弦定数を計算した。

我々のモデルは、 $V = 17^4$ の格子ゲージ理論に対応している

● $N_f = 2$ の場合、, Hybrid Monte Carlo 法が使える。

シミュレーションは、KEKのHitachi SR16000で行った。

One node: 32 cores power 7,
peak speed 980 GFlops
256 GB shared memory

Sustained speed は 約 600 GFlops

(日立のSEさんに助けて貰いました)

relevant な質量項 $m_q \bar{\psi} \psi$ で支配される赤外固定点では、
質量の次元を持つすべての物理量は $m_q \rightarrow 0$ でゼロになる。

特に質量の2乗の次元を持つ弦定数 σ は

$$\sigma \sim m_q^{2/(1+\gamma_*)}$$

と振る舞う。ここで、 γ_* は赤外固定点での質量異常次元である。

スケーリング則の導出法

$$\mu \frac{dm(\mu)}{d\mu} = -\gamma_* m(\mu)$$

$$\therefore m(\mu) = \mu^{-\gamma_*} \mu_0^{\gamma_*} m(\mu_0)$$

RG invariant mass M を $m(M) = M$ で定義する。

$\mu_0 = M$ および $\mu = a^{-1}$ とすると

$$m(a^{-1}) = m_q = a^{-\gamma_*} M^{1+\gamma_*}$$

$$\therefore aM = (am_q)^{1/(1+\gamma_*)}$$

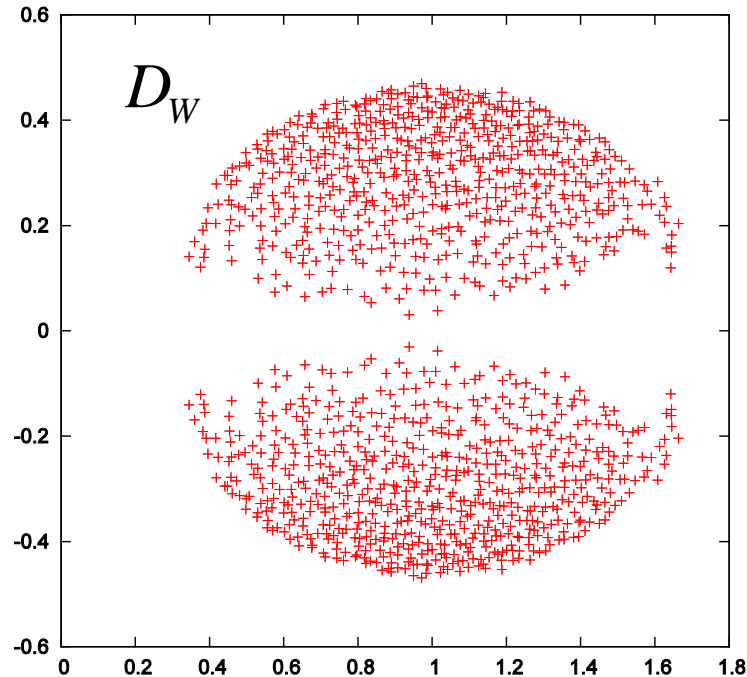
質量の次元を持つすべての物理量 M_X は M に比例することが示せるので

$$aM_X \propto (am_q)^{1/(1+\gamma_*)}$$

今までのところ、ハドロン相関関数の計算には成功していない。

しかし、positive hermitian Wilson Dirac operator $Q^2 = (D_W \gamma_5)^2$ の最低固有値 λ は簡単に計算できる。

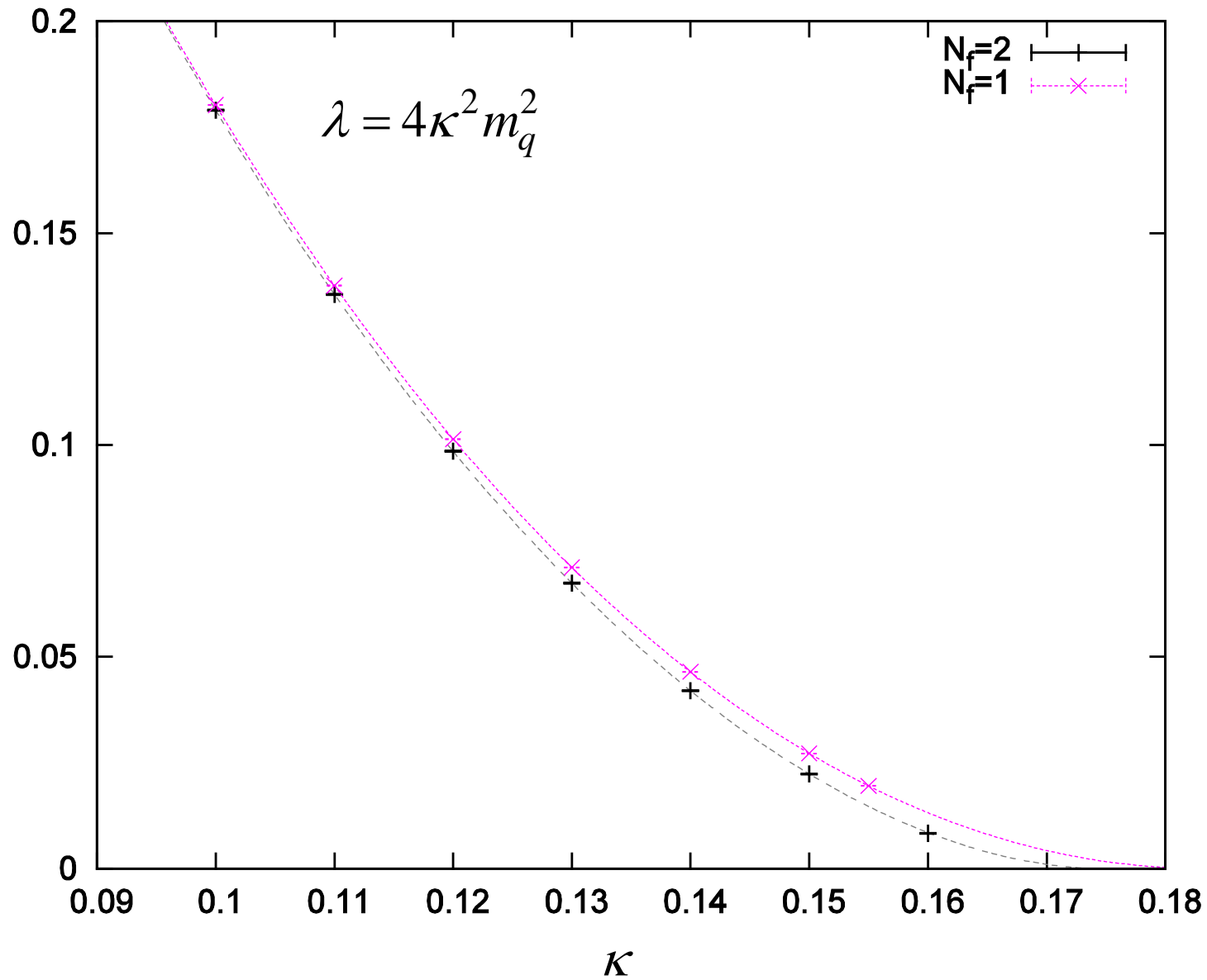
$$D_W = 1 - \kappa \sum_{\mu=1}^4 \left[(1 - \gamma_\mu) U_\mu^{adj} + (1 + \gamma_\mu) U_\mu^{\dagger adj} \right] = 2\kappa m_q + 2\kappa \partial_\mu \gamma^\mu + \dots$$



$$\lambda = 4\kappa^2 m_q^2$$

$$\therefore m_q = \sqrt{\lambda} / (2\kappa)$$

lowest eigenvalue, NF= 2 and 1, N=289, b=0.35



通常のQCDでは、 m_q は以下の様に振る舞うと考えられる。

$$m_q = (1/\kappa - 1/\kappa_c) / 2$$

しかし、 $N_f = 2$ の時にはそうはならない。実際

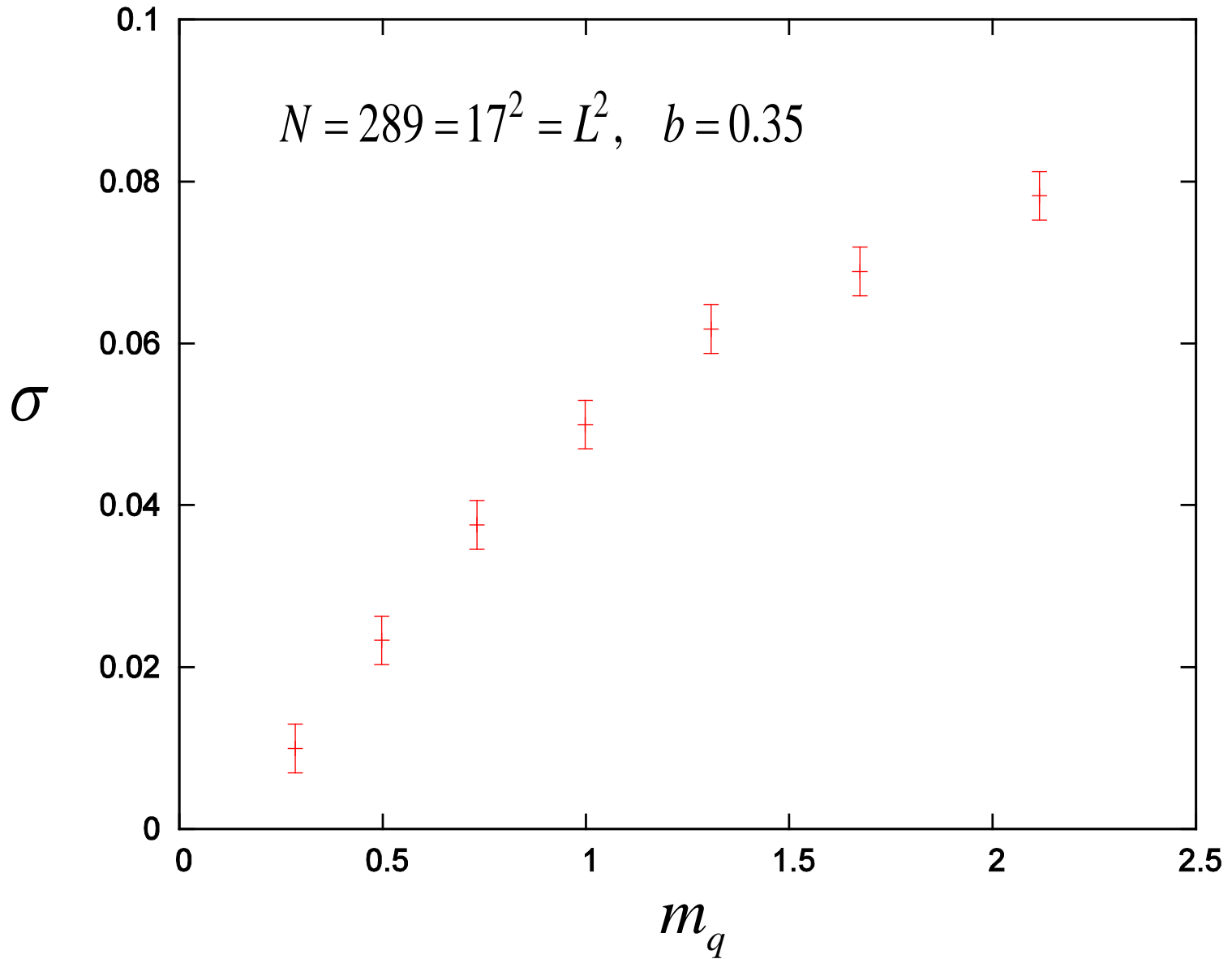
$$m_q = \sqrt{\lambda} / (2\kappa) = A (1/\kappa - 1/\kappa_c)^\delta (1 + B (1/\kappa - 1/\kappa_c))$$

とすると、 $\delta = 0.914(1)$ となり1にはならない。

一方、 $N_f = 1$ の時は、通常の qcd と同じに $\delta = 1.0010(5)$ となる。

String tension σ , $N=289$, $k=5$, $b=0.35$

$$N = 289 = 17^2 = L^2, \quad b = 0.35$$



弦定数 σ を関数

$$\sigma = A m_q^{2/(1+\gamma_*)} (1 + B m_q)$$

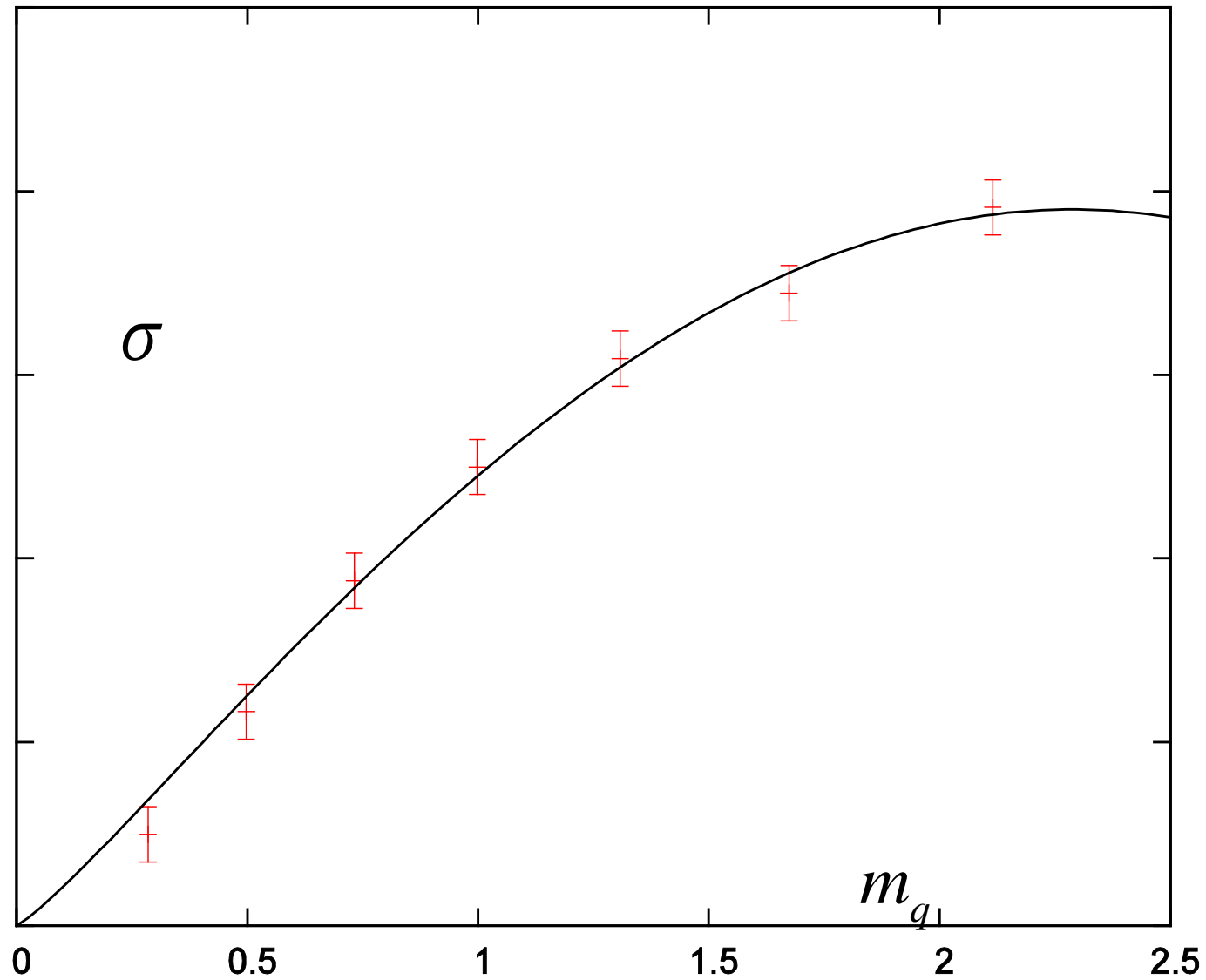
で fit する。結果は

$$A = 0.064(3)$$

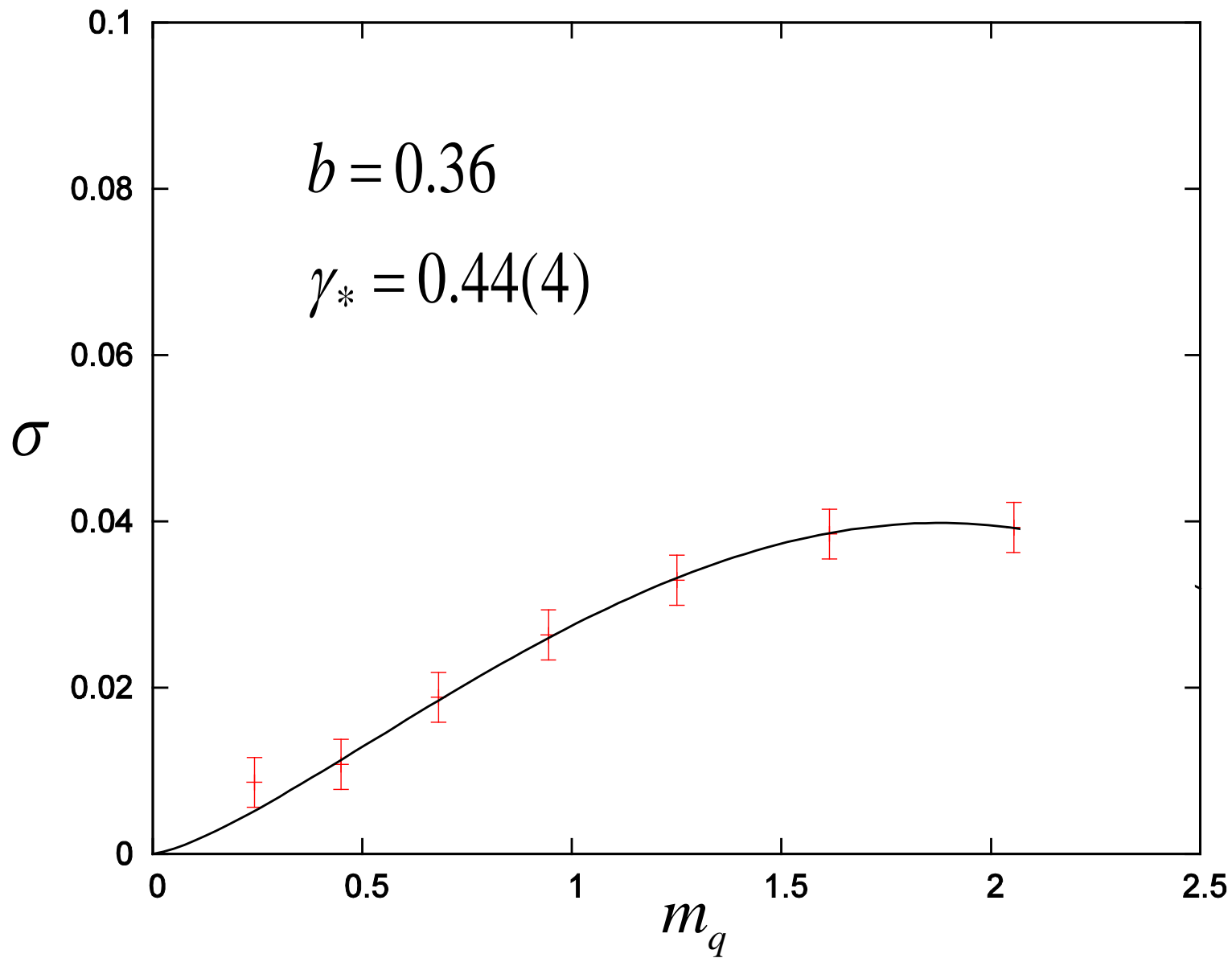
$$B = -0.24(3)$$

$$\gamma_* = 0.70(15)$$

String tension σ , N=289, k=5, b=0.35



String tension σ , $N=289$, $k=5$, $b=0.36$



Plan of the talk

- Twisted Eguchi-Kawai model
for pure $SU(N)$ gauge theory
- large N QCD with two adjoint fermions
- large N QCD with one adjoint fermion

Large N QCD with $N_f = 1$ adjoint fermions

adjoint fermion を1つ持つSU(N)ゲージ理論は large N 極限で、ランク2反対称表現の fundamental fermion を2つ持つ理論と同等であることが示せる。

(Armoni, Shifman, Veneziano, Kovtun, Unsal, Yaffe)

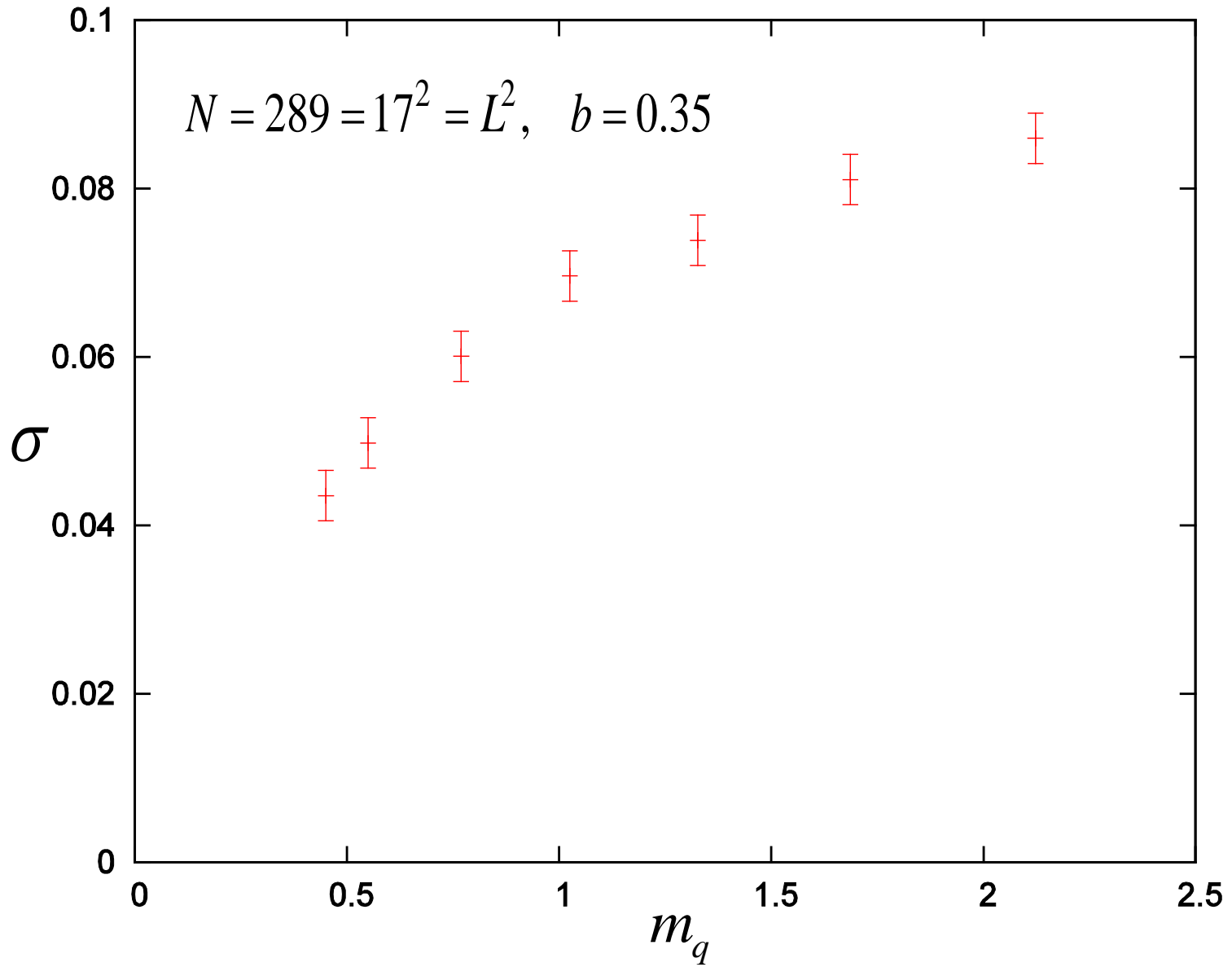
$N = 3$ の時、後者の理論は2フレーバーQCDと同等であり、我々のモデルは Corrigan-Ramond large N limit に対応している。

従って、 $N_f = 1$ adjoint fermion を持つ reduced model は

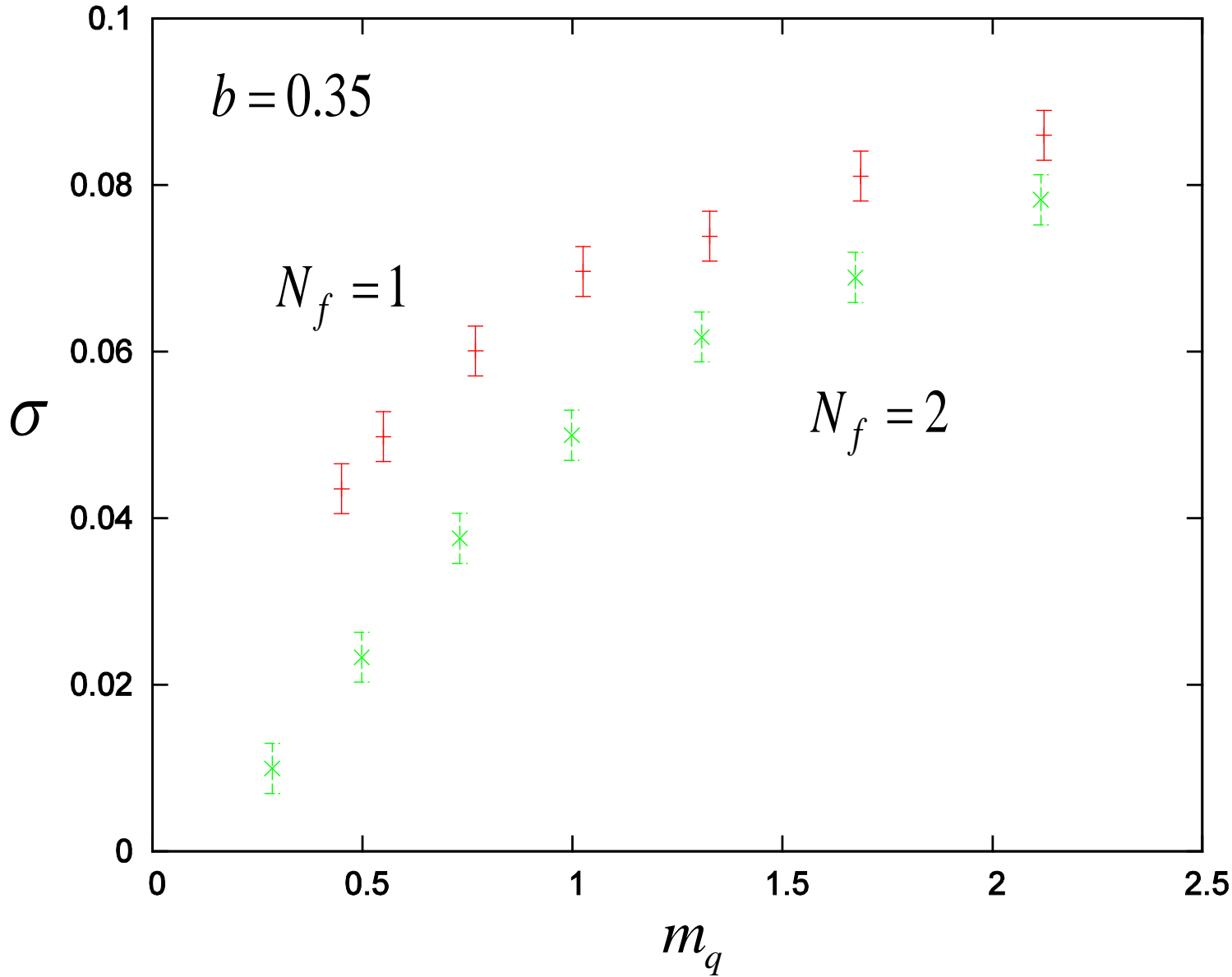
confining theory

であると考えられる。

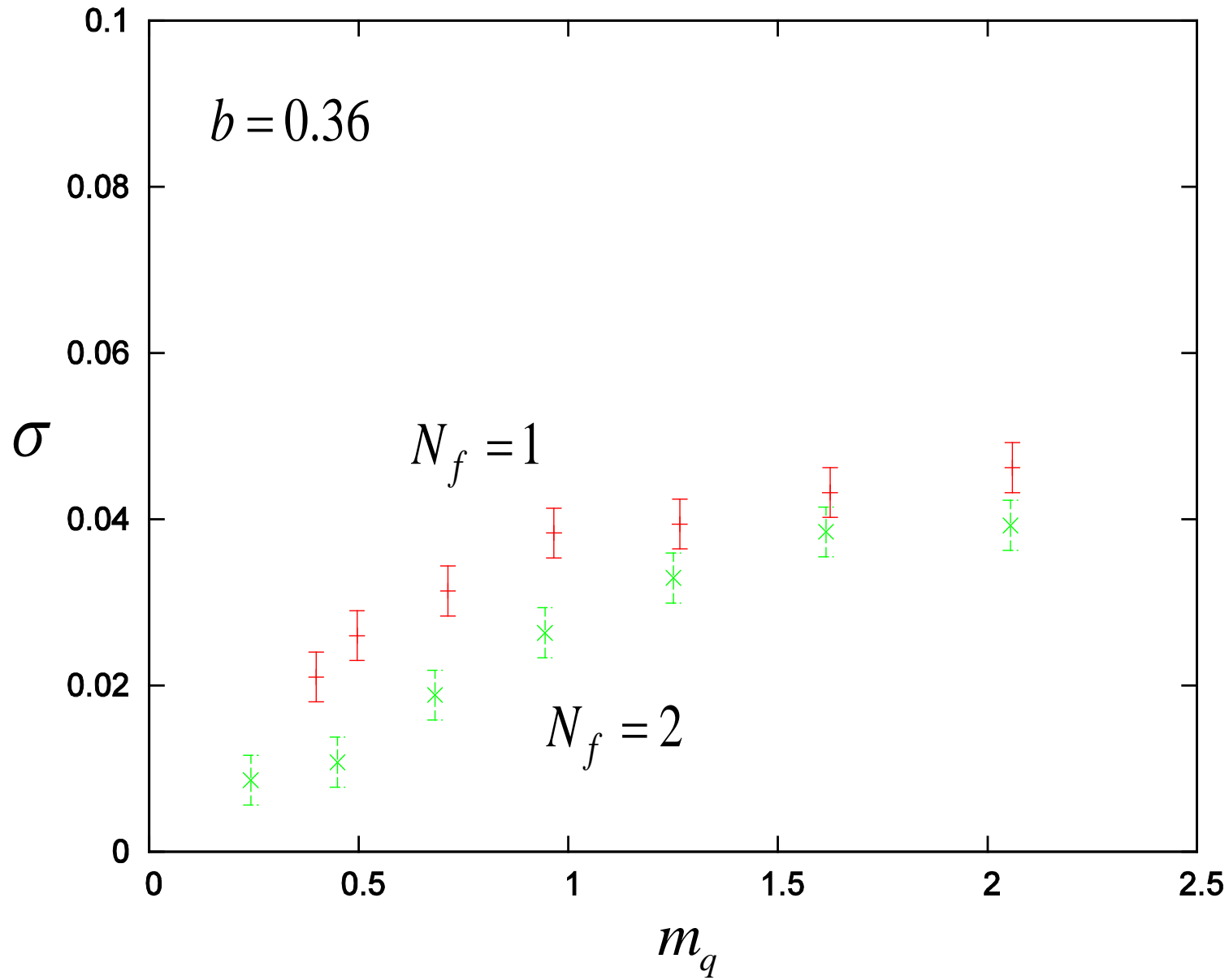
String tension σ , $N=289$, $k=5$, $b=0.35$



String tension σ , $N=289$, $k=5$, $b=0.35$



String tension σ , $N=289$, $k=5$, $b=0.35$



結論

ラージNQCDの時空縮約モデルを、twist境界条件のもとで考えた。

- Twisted Eguchi-Kawai model

reduced モデルが通常の格子ゲージ理論を再現するための twist 条件について考察し、数値シミュレーションにより連続理論での弦定数が正しく計算されることを示した。

- Large N QCD with $N_f = 2$ adjoint quark

conformal な理論であることを示した。質量異常次元 γ_* の計算を始めたが、まだ確定的な値を得るには至っていない。

- Large N QCD with $N_f = 1$ adjoint quark

confining な理論であることを示した。

残された問題

- m_q の小さいところで、弦定数の精度良い計算を行い、質量異常次元 γ_* を決定する。このためには、より大きな N での計算や 2^4 格子上での reduced model を考える必要性がある。
- ハドロン相関関数の計算。
- $N_f = 1/2$ や $3/2$ の研究。
- overlap fermion を用いた研究。