

ゲージ重力対応

- ・ 強結合のゲージ理論(ラージ N_c 極限)



AdS/CFT対応
[1998, Maldacena]

≃ 曲がった時空上の古典重力

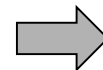
- 興味深い性質

強結合ゲージ理論が重力側から手計算で解ける。
逆に、重力(超弦理論)がゲージ側から理解できる。

- 多彩な研究

ホログラフィックQCD, ホログラフィック超伝導…

しかしながら、ゲージ重力対応は予想である。



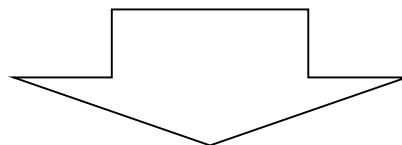
検証が重要

ゲージ・重力対応

[1998, マルダセナ,...]

格子超対称性の進展

[2004~, カプラン, 杉野,...]



超対称性を含む系で、

格子ゲージ理論を用いた

ゲージ理論と重力(超弦理論)をつなぐ新しい研究

格子を用いたゲージ重力対応の検証 ～格子ゲージ理論からブラックホールの物理へ

離散的手法による場と時空のダイナミクス@KEK

2013年9月28日(土曜)

加堂大輔 (KEK, 素核研)



立教大D3鎌田翔君との共同研究に基づく

PoS LATTICE 2012:064, D.K. and S.Kamata

トークプラン

1. 研究動機
2. 1次元SYMとゲージ重力対応
3. 格子作用の構成
4. 数値計算の結果
 - 超対称ウォード高橋恒等式
 - 高温展開の計算
 - ブラックホール内部エネルギー(準備段階)
5. まとめと今後の展開

2. 1次元SYMとゲージ重力対応

・連続理論の作用

$$S_{cont.} = \frac{N}{\lambda} \int dt \operatorname{tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_0 X_i)^2 - \frac{1}{4} [X_i, X_j]^2 + \frac{1}{2} \psi_\alpha D_0 \psi_\alpha + \frac{1}{2} \psi_\alpha (\gamma_i)_{\alpha\beta} [X_i, \psi_\beta] \right\},$$

A_0 : ゲージ場

X_i : スカラー場

ψ_α : フェルミ場

$i = 1, \dots, 9$

$\alpha = 1, \dots, 16$

$\lambda = g^2 N$

トフト結合定数

・16個の超対称不変性

$$\delta_\xi A_0 = \xi_\alpha \psi_\alpha,$$

$$\delta_\xi X_i = -i \xi_\alpha (\gamma_i)_{\alpha\beta} \psi_\beta,$$

$$\delta_\xi \psi_\alpha = i (\gamma_i)_{\alpha\beta} \xi_\beta D_0 X_i - \frac{i}{4} ([\gamma_i, \gamma_j])_{\alpha\beta} \xi_\beta [X_i, X_j],$$

ξ_α : 16個の変換パラメータ

ターゲット理論のゲージ重力双対性

1998 Itzhaki-Maldacena
-Sonnenschein-Yankielowicz

16個超対称チャージを持つ1次元SYM

\simeq IIA 型超弦理論のN D0-ブレーン解

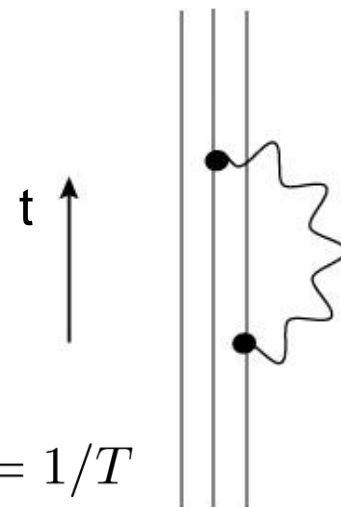
ブラックホール

ブラックホール内部エネルギーの
重力側からの解析計算

$$\frac{1}{N^2} \frac{E}{\lambda^{\frac{1}{3}}} = c_0 \left(\frac{T}{\lambda^{\frac{1}{3}}} \right)^{2.8},$$

$$c_0 = \frac{9}{14} \left(4^{13} 15^2 \left(\frac{\pi}{7} \right)^{14} \right)^{\frac{1}{5}} = 7.41.. \quad 1996 \text{ Klebanov - Tseytlin}$$

N D0-ブレーン



➡ 格子を用いてゲージ理論側からブラックホールの物理量を計算し、
双対性が成り立つかをチェックする。

なぜ格子を使うのか？

思想：

格子理論は....

- (1) 連続理論でできることは格子でもできる。
- (2) 数値計算で非摂動領域が調べられる。
- (3) 非摂動領域を調べる上でもっともパワフルな道具(の1つ)である。

実際、QCDのときは成り立っていそう。

格子QCD：摂動計算も可能。ハドロン質量、崩壊定数はもはや数%の統計誤差で評価できる。

格子でゲージ重力対応を調べるのも自然だろう。

先行研究(16個超対称チャージを持つ1d SYMの数値解析)

(1) Non-lattice (格子でない数値計算)

J. Nishimura, M. Hanada et al. (2007-2009)

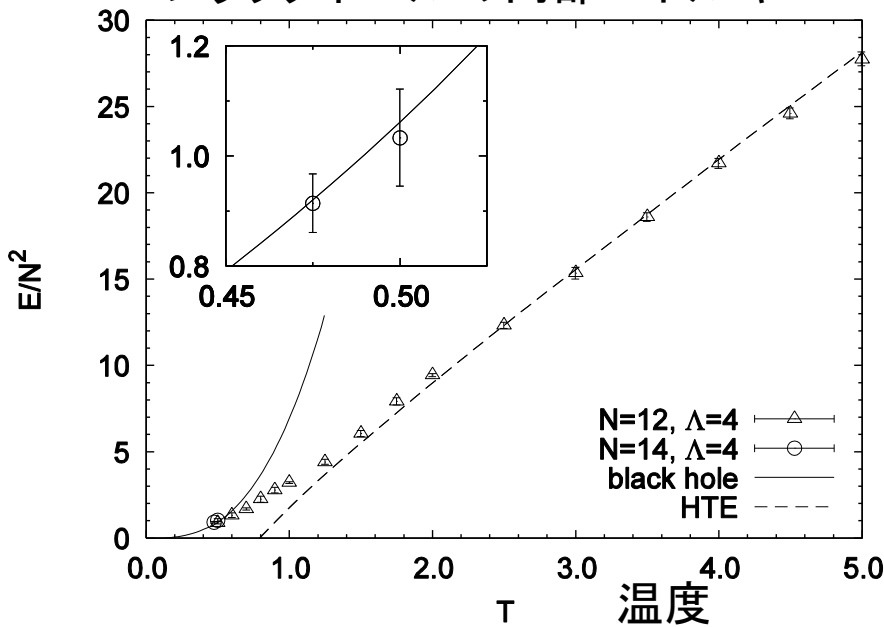
$$\Delta p = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$S = \frac{N}{\lambda} \beta \sum_{p=-\Lambda}^{\Lambda} \text{tr} \left\{ \frac{p^2}{2} X_i(p) X_i(-p) + \dots \right\} + \text{fermion} + \text{ghost}$$

$$A(t) = \frac{1}{\beta} \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

運動量シャープカットで正則化

ブラックホールの内部エネルギー



← 重力側の予言と
あっている。

(2) Lattice (格子計算)

S. Catterall and T. Wiseman (2007-2010)

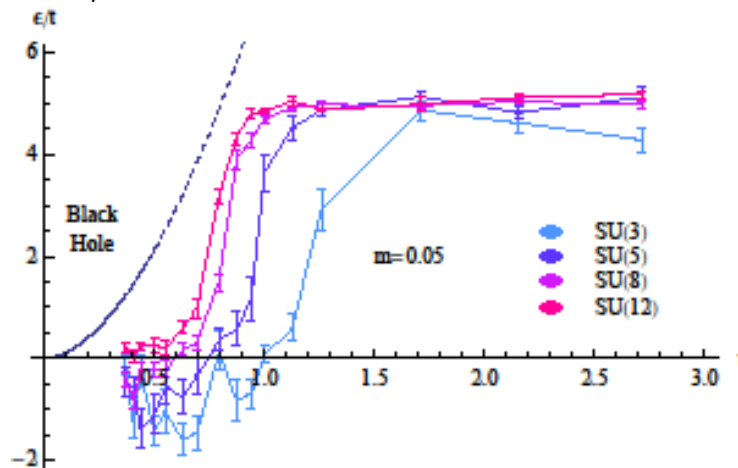
$$S = \frac{N}{\lambda_0} \sum_{t=1}^L \text{tr} \left\{ \frac{1}{2} (D_1 X_i)^2 - \frac{1}{4} [X_i, X_j]^2 + \text{fermion} \right\}$$

$$D_1 \varphi(t) = \frac{U_1(t) \varphi(t+a) U_1^{-1}(t) - \varphi(t)}{a}$$

$U_1(t) \in G$ ゲージ場はコンパクトなリンク場(厳密なゲージ不変性)

格子正則化

$E \rightarrow E/T$



← 重力側とあっていない…….

これは

non-lattice の立場が優れていることの証左なのか？

格子超対称性は不要なのか？

格子の成果や進展はQCDに限られるのか？

西村淳さん（PoS LAT2009 (2009) 016より引用）

「**non-lattice simulations are indeed useful for studying supersymmetric large-N gauge theories.....**」

“格子は必要ない”と言わない所が良いなあ

花田政範さん（2010年頃のプレゼンスライドより引用）

「**Lattice is not needed; momentum cutoff method is much more powerful.**」

本多正純君（Lattice2012 パラレルトーク スライドより引用）

「**Lattice ; hopeless...**」

・ 正則化された理論の持つ対称性

正則化後の対称性 : Non-lattice > lattice ?

	Non-lattice (西村さんら)	Lattice (カテラルら)	Lattice (本研究)
ゲージ対称性 (BRST対称性)	×	○	○
超対称性	×	×	2つ

おかしい... 格子の方が残ってる対称性が高いようだ。

我々は、

杉野さんが提唱された超対称性を2個格子上に保つ定式化を用いる。

cf. 摂動論的な次数勘定 $\dim[g^2] = 3, \dim[\phi] = 1, \dim[\psi] = \frac{3}{2}, \dim[\mathcal{O}] = p,$

$$\Delta S = \frac{1}{g^2} \int dt \mathcal{C} \mathcal{O}(t), \quad \mathcal{C} = a^{p-4} \sum_l c_l (g^2 a^3)^l \simeq \sum_l g^{2l} a^{p+3l-4}$$

連続極限で生き残りうるSUSYな演算子は、 $p=1$ の ϕ ← $O(9)$ 大域対称性で禁止

格子上の超対称性

- ・ SUSY代数は不成立 $\{Q, \bar{Q}\} = 2i\sigma^\mu P_\mu$

⇒ ライプニッツ則の破れ

ライプニッツ則

$$\partial_1(fg) = (\partial_1 f)g + f(\partial_1 g)$$

格子では

$$\nabla_1\{f(x)g(x)\} = \{\nabla_1 f(x)\}g(x) + f(x)\{\nabla_1 g(x)\} + a\nabla_1 f(x)\nabla_1 g(x)$$

$$\nabla_1 f(x) \equiv \frac{f(x+a) - f(x)}{a}$$

格子間隔のオーダーで破れる

超対称不変性への影響

$$\delta L_{cont.} \stackrel{\substack{= \partial_\mu X_\mu \\ \uparrow \\ \text{ライプニッツ則}}}{=} \delta S_{cont.} = \int d^4x \partial_\mu X_\mu = 0$$

$$\delta L_{LAT} = \partial_\mu X'_\mu + \mathcal{O}(a) \quad \Rightarrow \quad \delta S_{LAT} = \mathcal{O}(a)$$

格子超対称性の難しさ & その解決法

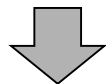
$$\cdot \delta S_{\text{LAT}} = \mathcal{O}(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$$

しかし、これは量子補正を加味すると成り立たない。

SUSY な頂点	$\sim a^m$	SUSYを破るファインマングラフ
ループ由来の発散	$\sim \left(\frac{1}{a}\right)^{m'}$	$\sim \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad (n \geq 0)$ と成り得る

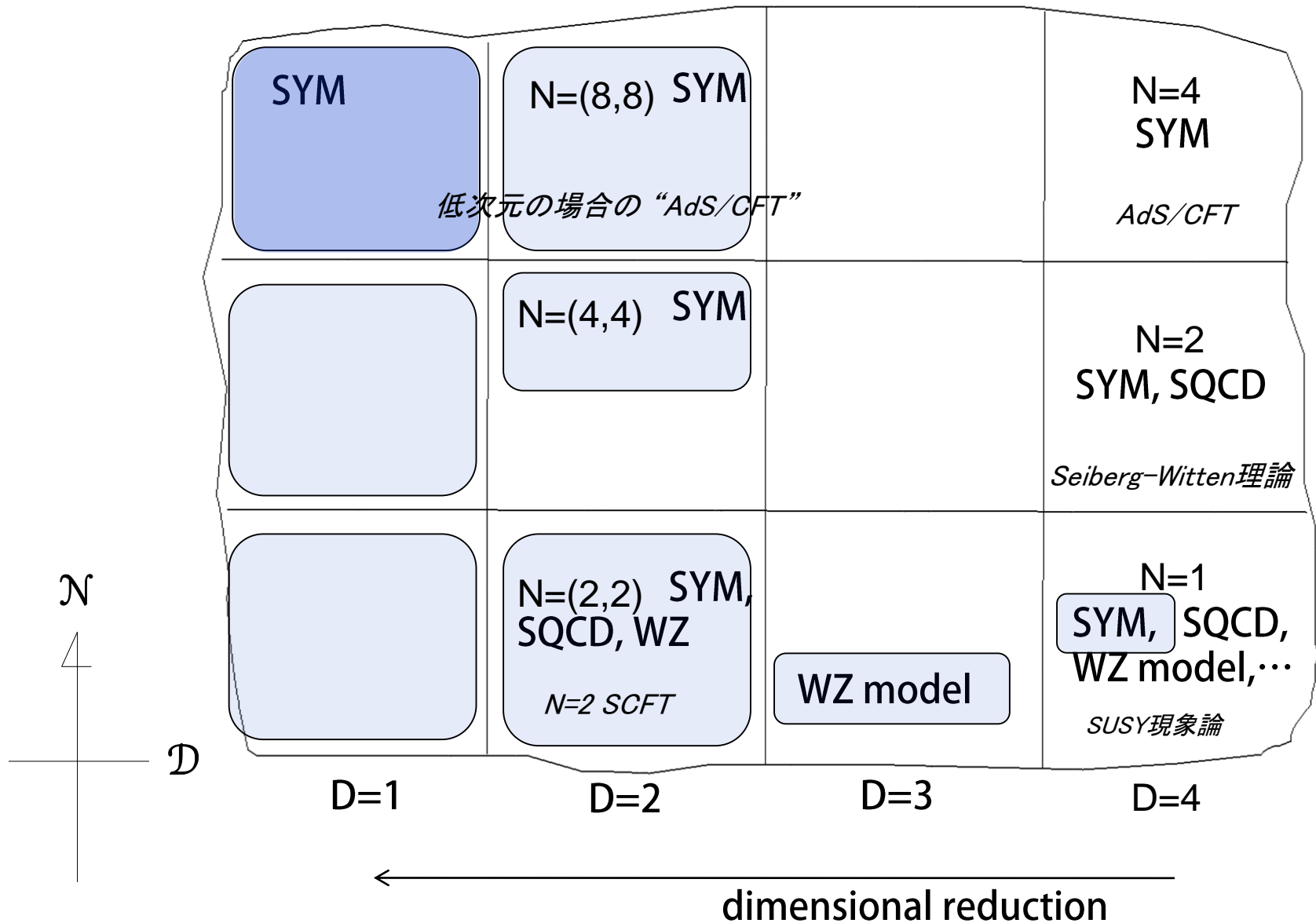
$$S_{\text{eff}} = S_0 + \frac{1}{a^n} S'_{\text{SUSY}} + \cdots + a^m S''_{\text{SUSY}}, \quad (m, n > 0)$$

シミュレーションする上ではたくさんの係数の微調整は困難



格子上に超対称性を部分的に保つ定式化

・ 格子上的超対称性の現状 (係数の微調整なしで望ましい連続極限)



連続作用の Q-exact 形

- Q_{\pm} は16個の超対称チャージ Q_{α} の線形結合で与えられる。

$$Q_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_5 - iQ_{13}), \quad Q_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - iQ_9),$$

- ターゲットのゲージ理論の作用は Q_{\pm} -exact型に書き直せる。

$$S_{cont.} = \frac{N}{\lambda} \int dt \operatorname{tr} \left\{ \frac{1}{2}(D_0 X_i)^2 - \frac{1}{4}[X_i, X_j]^2 + \frac{1}{2}\psi_{\alpha} D_0 \psi_{\alpha} + \frac{1}{2}\psi_{\alpha} (\gamma_i)_{\alpha\beta} [X_i, \psi_{\beta}] \right\} + \frac{N}{\lambda} \int dt \operatorname{tr} \left(\sum_{i=1}^7 H_i^2 \right),$$

実7個の補助場
↓

$$= Q_+ Q_- \frac{N}{\lambda} \int dt \operatorname{tr} \{ iX_6 D_0 X_3 + \dots \},$$

- Q_{\pm} 変換

$$Q_{\pm} A_0 = i\psi_{\pm},$$

$$Q_{\pm} \psi_{\pm} = D_0 \phi_{\pm},$$

$$Q_{\pm} \phi_{\pm} = 0, \quad \dots$$

$$\Rightarrow Q_{\pm}^2 = \delta_{\phi_{\pm}}, \quad \{Q_+, Q_-\} = \delta_C$$

- 作用はライプニッツ則を用いずに Q_{\pm} 不変である。

格子上でQ変換の作り方

- 変数として

$$\phi : \text{スカラー場} \quad A_\mu : \text{ゲージ場} \quad \psi_\mu : \text{フェルミ場}$$

- 連続のQ変換 ($Q^2 = \delta_\phi$)

$$\begin{aligned} Q\phi(x) &= 0, \\ QA_\mu(x) &= \psi_\mu(x), \\ Q\psi_\mu(x) &= D_\mu\phi(x) \end{aligned} \quad \curvearrowright$$

BRST変換のように

$Q^2 = \delta_\phi$ より自動的に定まる

$$Q\psi_\mu = Q^2 A_\mu = \delta_\phi A_\mu = D_\mu\phi$$

- 格子上でのQ変換

$$A_\mu \rightarrow U_\mu \in G$$

$$\begin{aligned} Q\phi(x) &= 0, \\ QU_\mu(x) &= i\psi_\mu(x)U_\mu(x), \\ Q\psi_\mu(x) &= i\psi_\mu(x)\psi_\mu(x) + D_\mu\phi(x). \end{aligned} \quad \curvearrowright$$

自動的に定まる。

$$\begin{aligned} Q^2 U_\mu &= Q(i\psi_\mu U_\mu) \\ &= iQ\psi_\mu U_\mu - i\psi_\mu Q U_\mu \\ &= i(Q\psi_\mu - i\psi_\mu\psi_\mu)U_\mu \\ &= i(D_\mu\phi)U_\mu \end{aligned}$$

➡ 格子上でも $Q^2 = \delta_\phi$

格子作用

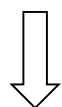
[2005, F.Sugino]

- ・ 格子上で閉じた Q_{\pm} 変換を定義することができる。

$$Q_{\pm}^2 = \delta_{\phi_{\pm}}, \quad \{Q_+, Q_-\} = \delta_C$$

- ・ 格子作用の定義

$$S_{cont.} = Q_+ Q_- \frac{N}{\lambda} \int dt \operatorname{tr} \{iX_6 D_0 X_3 + \dots\},$$



積分と共変微分 \rightarrow 和と共変差分に置換

$$S_{LAT} = Q_+ Q_- \frac{N}{\lambda_0} \sum_{t=0}^{L-1} \operatorname{tr} [iX_6 \nabla_0 X_1 + \dots], \quad \lambda_0 = \lambda a^3$$

∇_0 : リンク場で定義される前方共変差分

$$\Rightarrow Q_{\pm} S_{LAT} = Q_{\pm}^2(\dots) = 0$$

16個のうち2個分の超対称不変性が厳密

シミュレーションの詳細

- ・ HMC法

配位: 補助場 σ を含む $U_0, X_1, \dots, X_9, \sigma$

$$-\frac{1}{2} \text{tr} \left(\{\psi_+, \psi_-\}^2 \right) \rightarrow \text{tr} \left(\sigma^2 + \sigma \{\psi_+, \psi_-\} \right)$$

- ・ パフィアンは絶対値と位相部分を分けて計算

(位相の効果はクエンチするか、リウエイト法で取り入れる)

- ・ パフィアンの絶対値は擬フェルミ法と分数近似で用意

$$\begin{aligned} |\text{pf}(D)| &= \det(D^\dagger D)^{\frac{1}{4}} \\ &= \int D\phi^\dagger D\phi e^{-\sum_t \phi^\dagger(t)(D^\dagger D)^{-\frac{1}{4}}\phi(t)} \\ (D^\dagger D)^{-\frac{1}{4}} &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{D^\dagger D + \beta_i} \end{aligned}$$

超対称ウォード高橋恒等式

・ 超対称性の破れの源:

- (1) 温度 <----- 物理的
- (2) 格子間隔 <----- 非物理的

・ カットオフ由来の超対称性の破れを温度と分離して議論したい。

⇒ 超対称ウォード高橋恒等式を数値的に調べる

c.f. 2007, 金森-鈴木, 2次元 N=(2,2) SYM

・ 連続理論において、作用に質量項 $S \rightarrow S + \mu^2 \int dt \operatorname{tr} [X_i^2(t)]$, を加えたときの超対称ウォード高橋恒等式

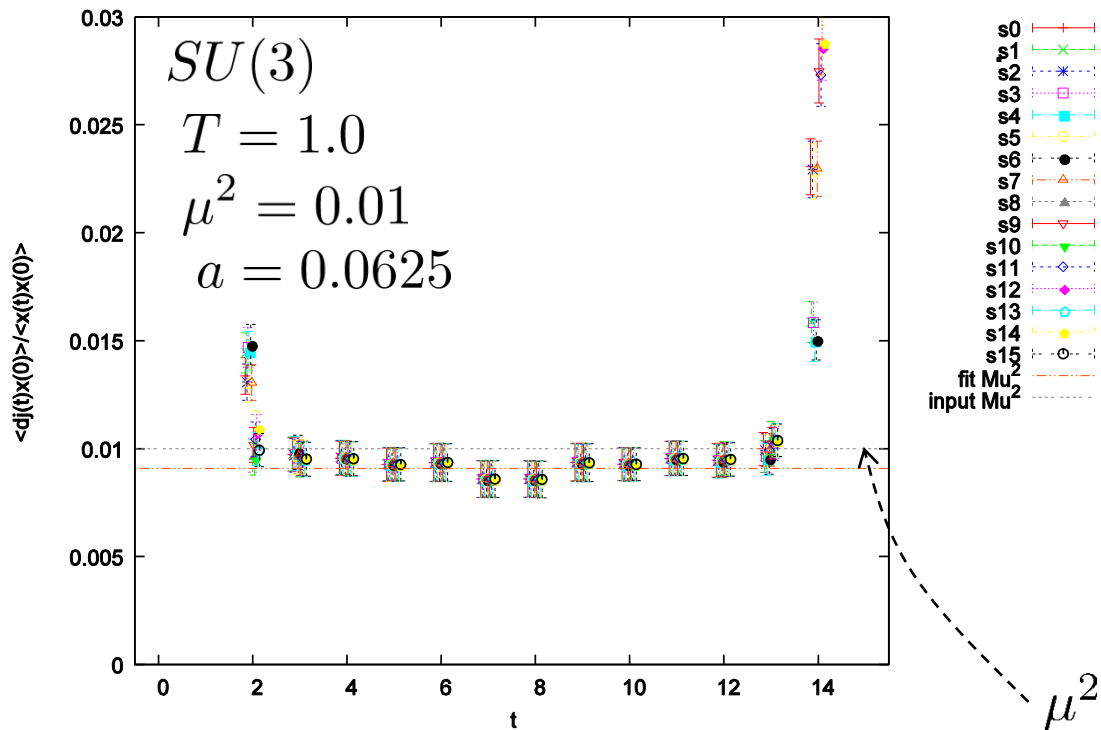
$$\partial_0 \langle J_\alpha(t) \mathcal{O}(s) \rangle = \mu^2 \langle B_\alpha(t) \mathcal{O}(s) \rangle + \delta(t-s) \langle \delta_\alpha \mathcal{O}(s) \rangle$$

$$J_\alpha \simeq [(\gamma_i)_{\alpha\beta} \operatorname{tr} (\psi_\beta D_0 X_i) + \dots], \quad \text{超対称カレント}$$

$$B_\alpha \simeq (\gamma_i)_{\alpha\beta} \operatorname{tr} \{X_i \psi_\beta\}. \quad \text{質量項由来の破れの項}$$

超対称ウォード高橋恒等式の数値的結果

- 相関関数の比 $\frac{\partial_0^s \langle J_\alpha(t) B_\beta(0) \rangle}{\langle B_\alpha(t) B_\beta(0) \rangle}$ をプロット。
SUSY Ward-Takahashi Relation

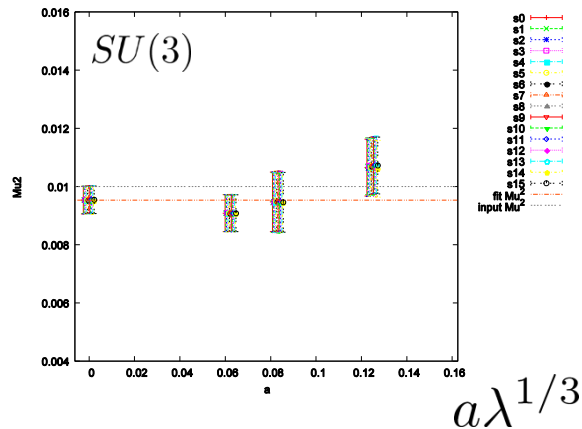


この格子間隔ですでに $\frac{\partial_0^s \langle J_\alpha(t) B_\beta(0) \rangle}{\langle B_\alpha(t) B_\beta(0) \rangle} \simeq \mu^2$ が良く成り立っている。

$$\partial_0 \langle J_\alpha(t) \mathcal{O}(s) \rangle = \mu^2 \langle B_\alpha(t) \mathcal{O}(s) \rangle + \delta(t-s) \langle \delta_\alpha \mathcal{O}(s) \rangle$$

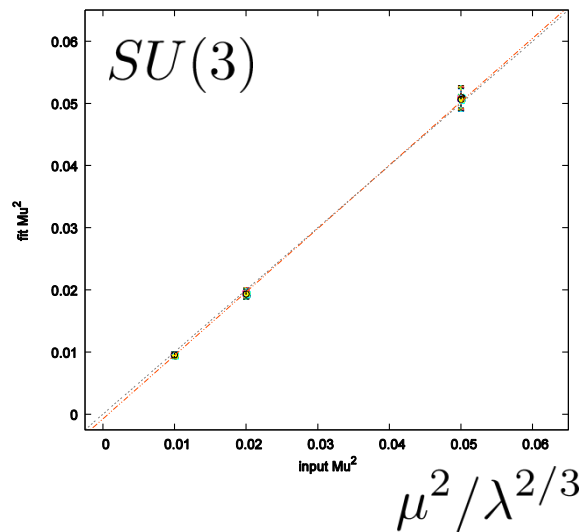
超対称ウォード高橋恒等式の連続極限・零質量極限

- 連続極限



- 格子間隔を3点でのデータに定数フィットを行い、プラト一値の連続極限を取る。

- 零質量極限



- 左図より

$$\frac{\partial_0^s \langle J_\alpha(t) B_\beta(0) \rangle}{\langle B_\alpha(t) B_\beta(0) \rangle} = \mu^2, \quad (t \neq 0)$$

カットオフによる超対称性の破れの効果は、連続極限で消え去っている。

- 零質量極限を取ると、

$$\mu^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \partial_0^s J_\alpha(t) = 0.$$

ブラックホール内部エネルギーの格子計算

- ゲージ理論側の定義

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z, \\ &= -\frac{3}{\beta} \langle S \rangle, \\ &= -\frac{3}{\beta} \left\{ \langle S_B \rangle - \frac{9}{2} N_t (N^2 - 1) \right\},\end{aligned}$$

ボソン作用
フェルミ作用
補助場(7個)の作用

$$S = S_B + S_F + S_H = Q_+ Q_- V$$
$$\langle S_F \rangle = -\frac{16}{2} N_t (N_c^2 - 1),$$
$$\langle S_H \rangle = \frac{7}{2} N_t (N_c^2 - 1),$$

- 温度を変えた格子計算

低温領域 ($T \ll 1$) \longrightarrow 重力側の解析解と一致すると期待

高温領域 ($T \gg 1$) \longrightarrow ゲージ理論の高温展開と比較

高温展開

川原-西村-竹内(2007)

- 作用をフーリエ変換し、ゼロモード A_μ とノゼロモード X_n^i で表すと、

$$S = -\frac{N}{4} \text{tr}[A_\mu, A_\nu]^2 + \frac{N}{2} \sum_{n \neq 0} (2\pi n)^2 \text{tr}(X_{-n}^i X_n^i) + S_{int} + \dots$$

↑ $1/T$ の高次

ノゼロモード積分は摂動計算で、
ゼロモード積分は行列模型の数値計算で評価

$$\langle\langle \mathcal{O} \rangle\rangle = \frac{1}{Z_0} \int \prod_{a,\mu} dA_\mu^a \mathcal{O} \left\{ e^{\frac{N}{4} \text{tr}([A_\mu, A_\nu]^2)} \right\}, \quad (\text{行列模型の期待値})$$

- NLOでの内部エネルギー

$$\langle E \rangle = 6 \left(1 - \frac{1}{N^2} \right) T + (\chi_5 - \chi_6 - 4\chi_1) T^{-1/2} + \mathcal{O}(T^{-2})$$

$$\chi_1 = \frac{9}{10} \langle\langle \text{tr}(A_\mu^2) \rangle\rangle \quad \mu = 1, \dots, 10, \quad i, j, k = 1, \dots, 9$$

$$\chi_5 = \langle\langle \text{tr}([A_i, A_j]^2) \text{tr}(A_k^2) \rangle\rangle - \langle\langle \text{tr}([A_i, A_j]^2) \rangle\rangle \langle\langle \text{tr}(A_k^2) \rangle\rangle$$

$$\chi_6 = \langle\langle \text{tr}([A_i, A_j]^2) \text{tr}(A_{10}^2) \rangle\rangle - \langle\langle \text{tr}([A_i, A_j]^2) \rangle\rangle \langle\langle \text{tr}(A_{10}^2) \rangle\rangle$$

—————> 念のために再計算

高温展開 - 再考

・行列モデルによる係数 χ_1, χ_5, χ_6 の評価

	χ_1	χ_5	χ_6	
川原-西村-竹内(2007)	2.29566(7)	4.38(2)	-0.59(1)	?
我々の再計算	2.29573(9)	4.5913(1)	-0.5101(0)	

・ Schwinger-Dyson方程式

$$0 = \sum_{a,l} \int DA \frac{\partial}{\partial A_l^a} \left\{ A_l^a \text{tr}(A_i^2) e^{\frac{N}{4} \text{tr}([A_\mu, A_\nu]^2)} \right\}, \dots$$

$$\chi_1 = \frac{9}{10} \langle\langle \text{tr}(A_\mu^2) \rangle\rangle$$

$$\chi_5 \simeq \langle\langle \text{tr}([A_i, A_j]^2) \text{tr}(A_k^2) \rangle\rangle$$

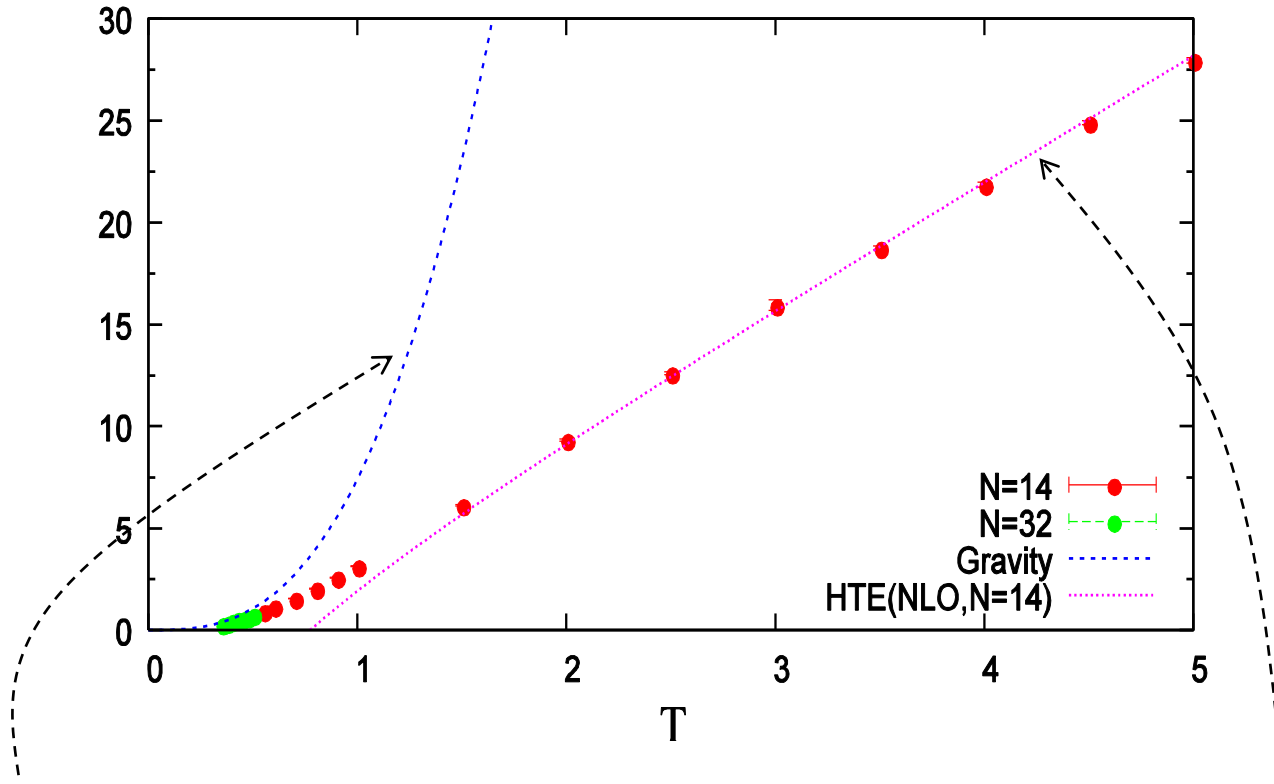
$$\Rightarrow \chi_5 = 2\chi_1, \quad \chi_6 = -\frac{2}{9}\chi_1 \quad \langle E \rangle = 6 \left(1 - \frac{1}{N^2} \right) T - \frac{16}{9} \chi_1 T^{-1/2} + \mathcal{O}(T^{-2})$$

・ SD方程式の結果との比較

	$\frac{\chi_5}{2\chi_1}$	$-\frac{9\chi_6}{2\chi_1}$	
川原-西村-竹内(2007)	0.954 (4)	1.157 (20)	何事も確かめるのが良い
我々の再計算	0.998 (2)	1.000 (2)	

ブラックホールの内部エネルギー(準備段階)

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$$



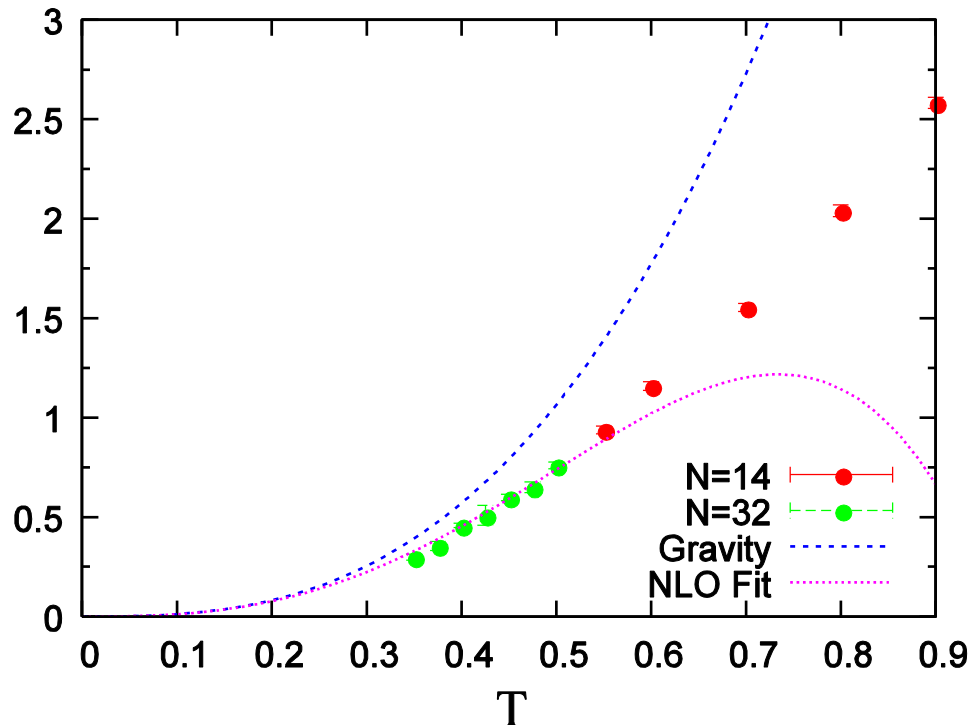
重力側 (1996 Klebanov - Tseytlin)

$$\frac{1}{N^2} \frac{E}{\lambda^{\frac{1}{3}}} = c \left(\frac{T}{\lambda^{\frac{1}{3}}} \right)^{2.8}, \quad c = 7.41..$$

高温展開(NLO, N=14)

川原-西村-竹内 (2007),
加堂-鎌田 (準備中)

- ブラックホール内部エネルギーの低温領域



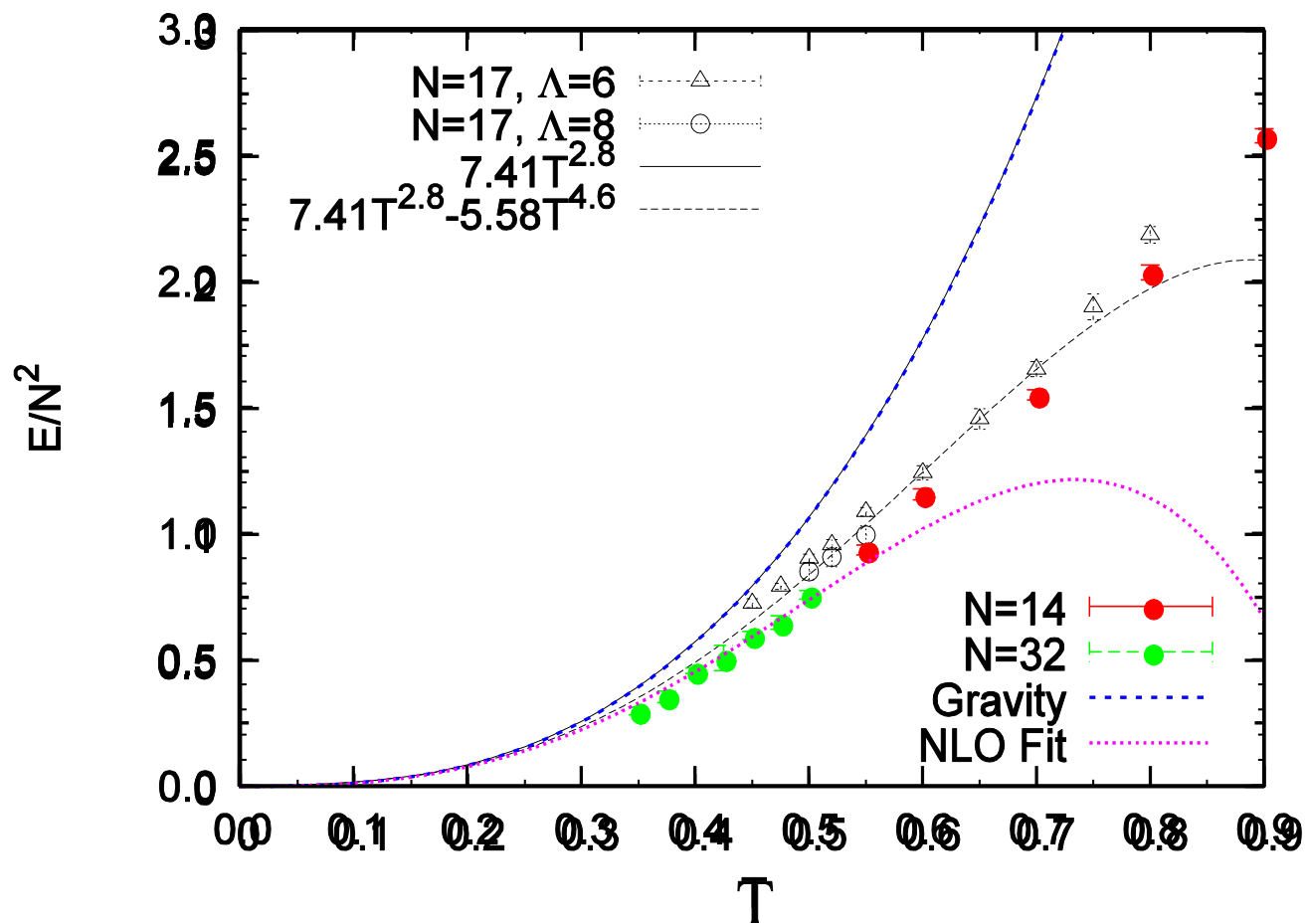
- 補正項を加えたフィット

$$\frac{1}{N^2} \frac{E}{\lambda^{\frac{1}{3}}} = 7.41 \left(\frac{T}{\lambda^{\frac{1}{3}}} \right)^{2.8} + c_1 \left(\frac{T}{\lambda^{\frac{1}{3}}} \right)^{4.6},$$

$$c_1 = -7.88 \pm 0.3 \quad [\text{我々の結果}] \quad (\chi^2/dof \simeq 1.0)$$

$$c_1 = -5.56 \pm 0.01 \quad [\text{西村氏らの非格子計算の結果(2009)}]$$

西村さんらの非格子計算との比較



5. まとめと今後の展開

✓ 16個超対称チャージを持つ1次元SYM \simeq IIA型超弦理論のN D0-ブレーン解
格子ゲージ理論

✓ 格子作用は2/16個の超対称変換を厳密に保つ(杉野氏の定式化)

✓ 超対称ワード高橋恒等式の数値計算から

→ 格子間隔効果による超対称性の破れは連続極限で消え去り、
格子理論は望ましい連続理論を再現する。

✓ ブラックホールの内部エネルギーの結果(準備段階)

- 高温展開の計算[川原-西村-竹内(07)]の修正

- 格子計算から

$$\frac{1}{N^2} \frac{E}{\lambda^{\frac{1}{3}}} = 7.41 \left(\frac{T}{\lambda^{\frac{1}{3}}} \right)^{2.8} + c_1 \left(\frac{T}{\lambda^{\frac{1}{3}}} \right)^{4.6},$$

$$c_1 = -7.88 \pm 0.30$$

今後の展開

- ・ 1次元 SYMの計算

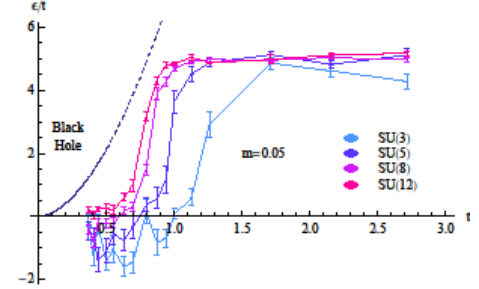
$$\frac{1}{N^2} \frac{E}{\lambda^{\frac{1}{3}}} = 7.41 \left(\frac{T}{\lambda^{\frac{1}{3}}} \right)^{2.8} + c_1 \left(\frac{T}{\lambda^{\frac{1}{3}}} \right)^{4.6},$$

- 係数 $c_1 = -7.88 \pm 0.3$ の連続極限
- 低温領域の計算から最低次の係数7.41の説明
- 他の物理量(ウィルソンライン,...)での計算
- $1/N$ 補正の計算
- ...

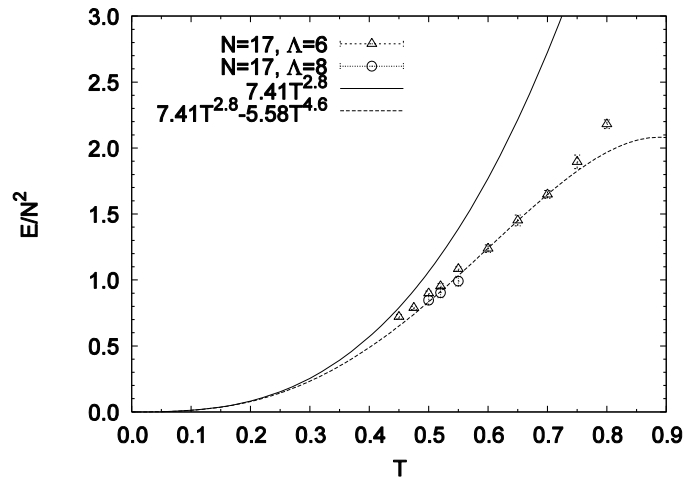
- ・ 次元を上げた場合での双対性の検証

最後に、

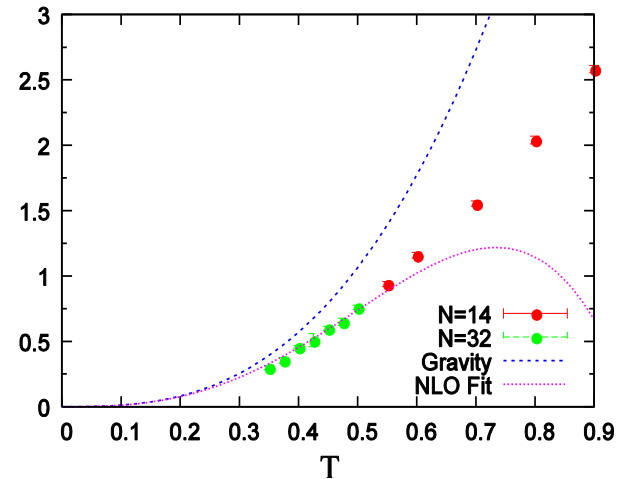
カテラルらの格子計算



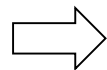
西村-花田らのnon-lattice計算



我々の格子計算

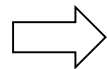


格子超対称性は不要か？



そんなことはない。
大きな発展性がある分野です。

格子はhopelessか？



いえいえ、hopefulです。