

4次元N=4超対称ヤンミルズ理論の 数値シミュレーション

伊敷 吾郎 (京大基研)

以下の論文に基づく

JHEP0611(2006)089	Ishiki-Shimasaki-Takayama-Tsuchiya	}	定式化
PRD78(2008)106001	Ishii-Ishiki-Shimasaki-Tsuchiya		
PRL102(2009)111601	Ishiki-Kim-Nishimura-Tsuchiya	}	定式化の チェック
JHEP0909(2009) 029	Ishiki-Kim-Nishimura-Tsuchiya		
JHEP1111 (2011) 036	Ishiki-Shimasaki-Tsuchiya		
JHEP1302 (2013) 148	Asano-Ishiki-Okada-Shimasaki		
arXiv:1308.3525	Honda-Ishiki-Kim-Nishimura-Tsuchiya	}	数値計算
Pos LATTICE2010, 253	Honda-Ishiki-Kim-Nishimura-Tsuchiya		
Pos LATTICE2011, 244	Honda-Ishiki-Nishimura-Tsuchiya		

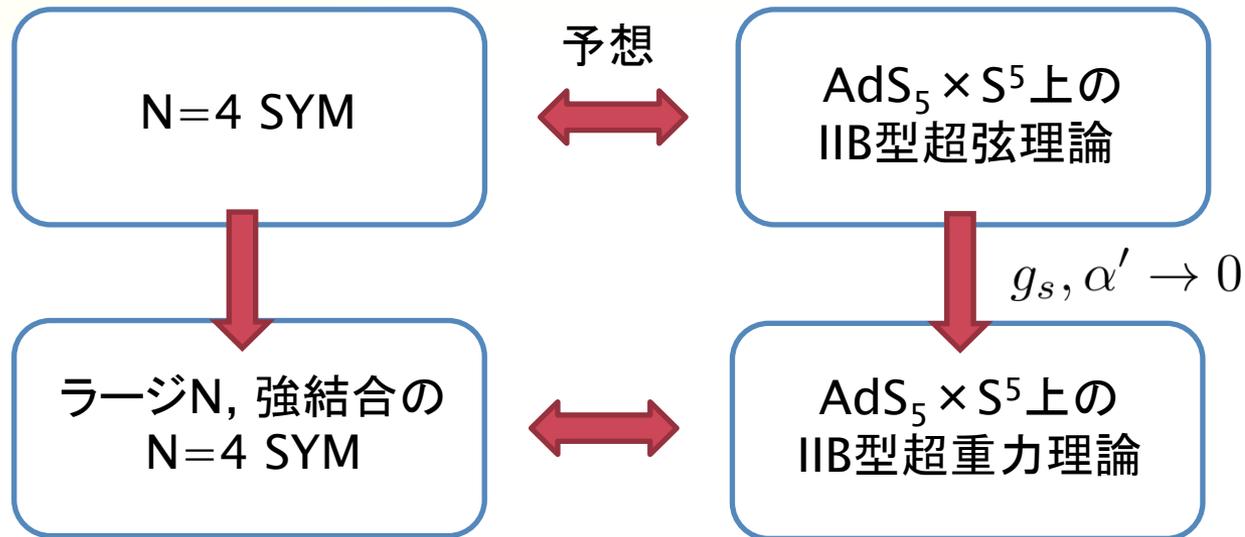
共同研究者

石井氏 (Crete大), 島崎氏 (京大理), 土屋氏 (静岡大), 西村氏 (KEK, 総研大), Kim氏 (KIAS)

本多氏(KEK, 京大基研), 浅野氏 (京大理), 岡田氏 (京大基研), 高山氏 (元Bohr研), 太田氏(明治学院大)

N=4 Super Yang-Mills(SYM)理論

- ◆ 4次元のmaximal susyのゲージ理論
- ◆ 超共形対称性 PSU(2,2|4), 16+16 SUSY
- ◆ AdS/CFT対応



- ◆ N=4 SYMの強結合領域を解析する方法
 - ・ 特別なセクターに注目する (BPS, BMN極限, 可積分系, etc)
 - ・ 数値計算 ← 今日の話

目次

1. Planar $N=4$ SYMの非摂動的な定式化
2. 定式化のチェック
3. $N=4$ SYMの数値計算
4. まとめと展望

1. Planar $N=4$ SYMの非摂動的な定式化

1 d maximal SYMの非摂動的な正則化

UV finiteな理論なので、SUSYは連続極限で回復する。Fine-tuning不要。

- ◆ 格子正則化 [Kado-san's talk, Catterall-Wiseman]
- ◆ 運動量カットオフによる正則化 [Anagnostopoulos-Hanada-Nishimura-Takeuchi]

1次元以下のSUSY理論は、数値計算ができる。

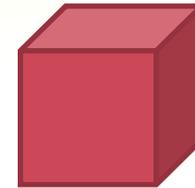
4d $N=4$ SYMの非摂動的な定式化

- ◆ アイデア：1d以下のSYMのラージ N 極限として、4d SYMを記述する。

ラージ N リダクション

R^d 上のYM理論は、ラージ N 極限において、その次元簡約で得られる行列模型と等価である。

[Eguchi-Kawai, Okawa-san's talk]



YM on R^d



行列模型

- ◆ しかしflatな時空の上で考えると、

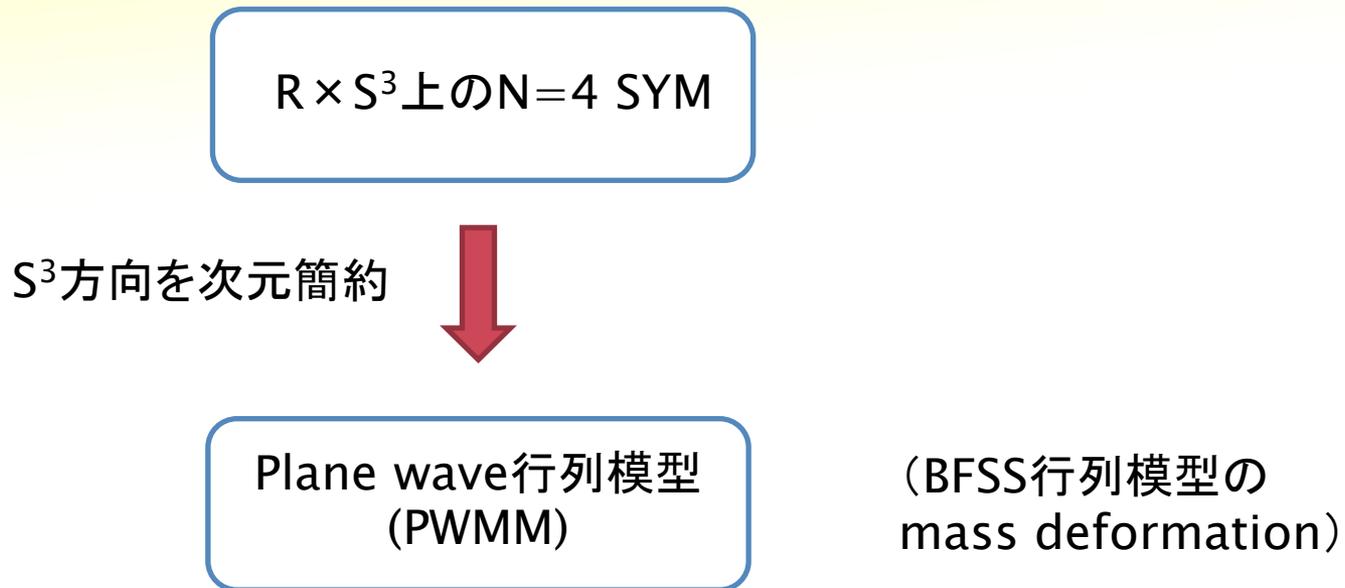
- ・ $U(1)^D$ 対称性の破れによって、連続極限が取れない場合がある。
- ・ これを改良するためにquench, twist等の処方があるが、SUSYは破ってしまう。

[Bhanot-Heller-Nouberger, Gross-Kitazawa, Gonzalez-Arroyo-Okawa]

⇒ 曲がった空間の上で考える。

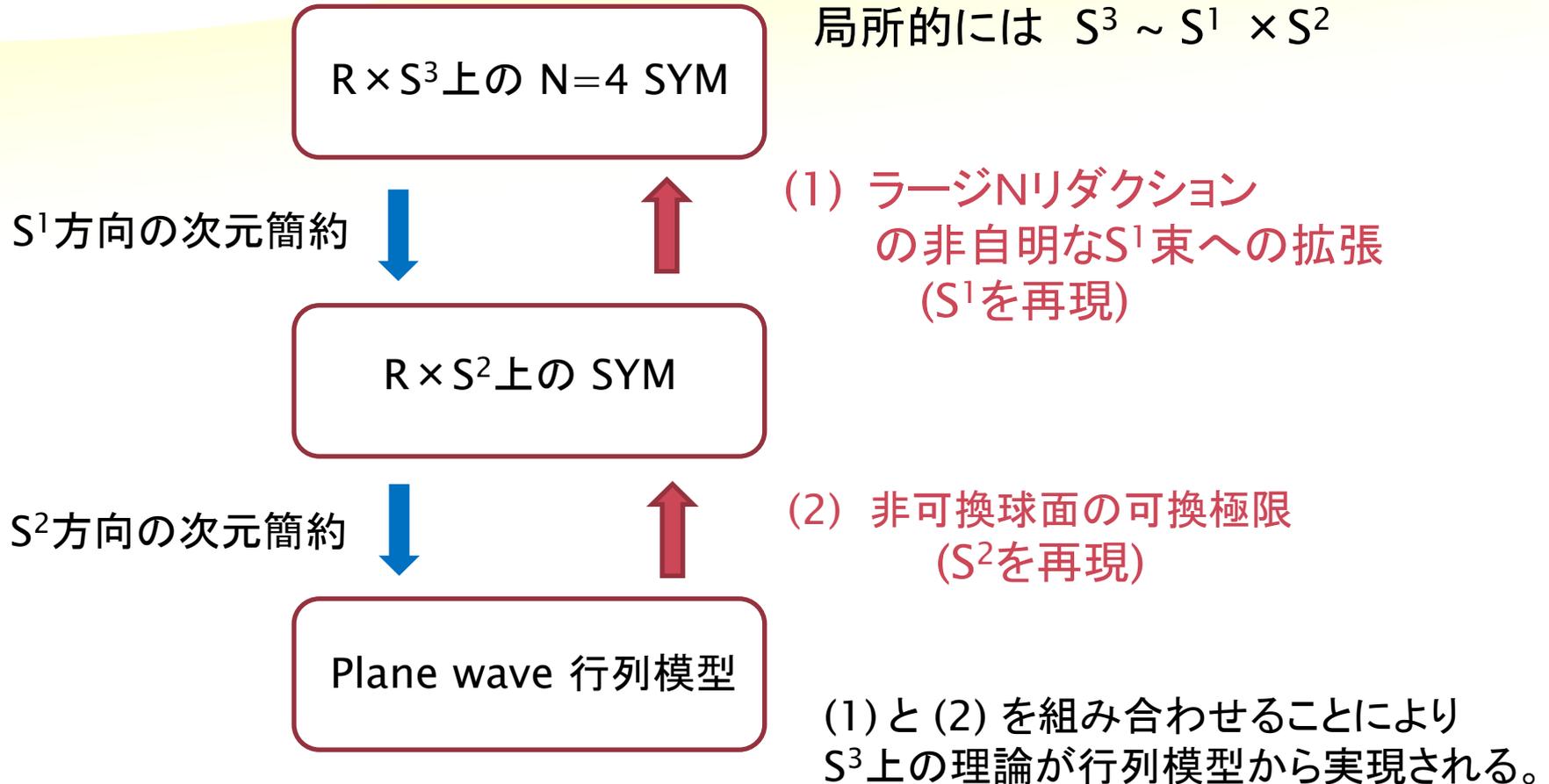
$R \times S^3$ 上のSYMとラージNリダクション

- ◆ N=4 SYMは超共形対称性のおかげで、 R^4 上の理論と $R \times S^3$ 上の理論は等価 (radial quantization)



- ◆ ラージNリダクションを通して、PWMMを用いて、N=4 SYMが記述できる。
- ◆ quench, twist等の操作は必要なく、16 SUSY (SU(2|4)) の対称性が保たれる。
- ◆ N=4 SYMのラージN極限しか記述できない。

$R \times S^3$ 上の $N=4$ SYMに対するラージ N リダクション



作用

$$S^3 \sim S^1 \times S^2$$

◆ $R \times S^3$ 上の N=4 SYM

$$S = \frac{1}{g_{R \times S^3}^2} \int dt d\Omega_3 \text{Tr} \left(-\frac{1}{4} F_{ab}^2 + (SO(6) \text{ scalar}) + (\text{fermion}) \right)$$

◆ $R \times S^2$ 上の N=8 SYM



(1) ラージNリダクション
(S^1 を再現)

$$S = \frac{1}{g_{R \times S^2}^2} \int dt d\Omega_2 \text{Tr} \left(\frac{1}{2} f_{0i}^2 - \frac{1}{2} (f_{12} - \mu\phi)^2 - \frac{1}{2} (D_a\phi)^2 + \dots \right)$$

◆ PWMM



(2) 非可換球面の可換極限
(S^2 を再現)

$$S = \frac{1}{g_{PW}^2} \int dt \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (D_0 X_i)^2 - \frac{1}{2} \left(\mu X_i - \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} [X_j, X_k] \right)^2 + \dots \right)$$

μ を0に置くとBFSS行列模型と同じ

Large N Reduction

[Eguchi-Kawai, Parisi, Gross-Kitazawa]

例：R上の ϕ^4 理論

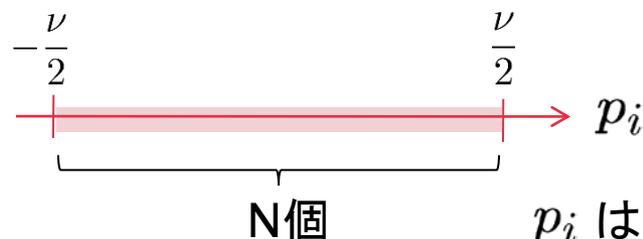
$$S = \int d\tau \text{Tr} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} \right)^2 + \frac{m^2}{2} \phi(\tau)^2 + \frac{g^2}{4} \phi(\tau)^4 \right)$$



Reduction

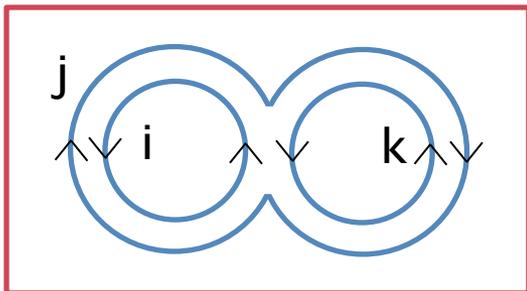
$$S_r = \frac{2\pi}{\nu} \text{Tr} \left(-\frac{1}{2} [P, \phi]^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{g^2}{4} \phi^4 \right)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & & \\ & \cdots & \\ & & p_N \end{pmatrix}$$



次の極限で、reduced model は元の理論のplanar 極限を再現する。

$$N \rightarrow \infty \quad \nu \rightarrow \infty \quad \frac{\nu}{N} \rightarrow 0$$



planar

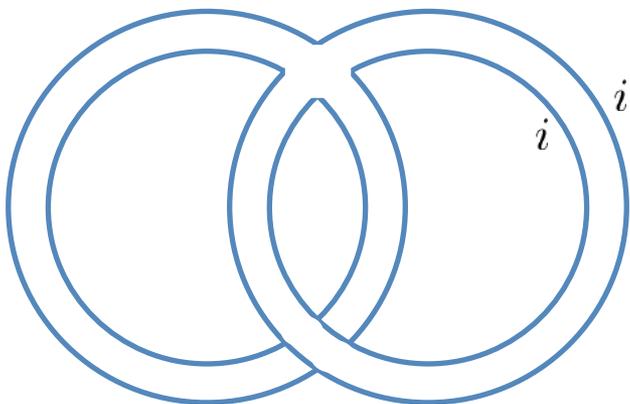
$$= \left(g^2 \frac{2\pi}{\nu} \right) \left(\frac{\nu}{2\pi} \right)^2 \sum_{i,j,k} \frac{1}{(p_i - p_j)^2 + m^2} \frac{1}{(p_j - p_k)^2 + m^2}$$

$$\rightarrow \lambda N^2 \frac{2\pi}{\nu} \int \frac{dk_1}{2\pi} \frac{dk_2}{2\pi} \frac{1}{k_1^2 + m^2} \frac{1}{k_1^2 + m^2}$$

$$\left(N \rightarrow \infty \quad \nu \rightarrow \infty \quad \frac{\nu}{N} \rightarrow 0 \right)$$

場の理論を再現

◆ Non-planarは場の理論には対応しないが、planar と比べて $O(\nu^2/N^2)$ で無視できる。



$$\frac{1}{(p_i - p_i)^2 + m^2} = \frac{1}{m^2}$$

運動量を運べない

◆ ポイント: $[P, \]$ は連続的な運動量(微分)と見なせる。

$$[P, \] \sim p_i - p_j \sim k \sim i\partial$$

◆ S^1 上のラージNリダクション

$$P_{S^1} = \begin{pmatrix} n_1 & & \\ & \cdots & \\ & & n_N \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_{k \times k}$$

固有値は離散的
 S^1 上の運動量を再現

$$[P_{S^1}, \] \sim n \sim i\partial_{S^1}$$

$$N \rightarrow \infty \quad \nu \rightarrow \infty \quad \frac{\nu}{N} = 1$$

$$k \rightarrow \infty$$

Non-planarの寄与を
落とすために必要

$S_r = \frac{2\pi}{\nu} \text{Tr} \left(-\frac{1}{2} [P_{S^1}, \phi]^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{g^2}{4} \phi^4 \right)$ は S^1 上の理論のplanar極限を再現する。

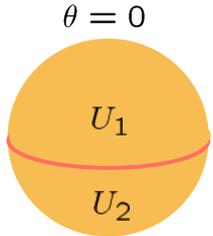
SYM on $R \times S^2 \rightarrow$ SYM on $R \times S^3$

$$S_{R \times S^2} = \frac{1}{g_{YM2}^2} \int dt d\Omega_2 \text{Tr} \left(-\frac{1}{2} (f_{12} - \phi)^2 - \frac{1}{2} (D_\alpha \phi)^2 + \dots \right)$$

$R \times S^2$ 上のSYMには、 P_{S^1} がモノポール解として存在

古典解 Dirac monopole

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_1 = 0 \\ \hat{a}_2 = \begin{cases} \tan \frac{\theta}{2} \hat{\phi} & \text{on } U_1 \\ -\cot \frac{\theta}{2} \hat{\phi} & \text{on } U_2 \end{cases} \\ \hat{\phi} = P_{S^1} = \begin{pmatrix} n_1 & & \\ & \cdots & \\ & & n_N \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_{k \times k} \end{array} \right.$$



$\theta = 0$
 U_1
 U_2

$\frac{\nu}{2}$

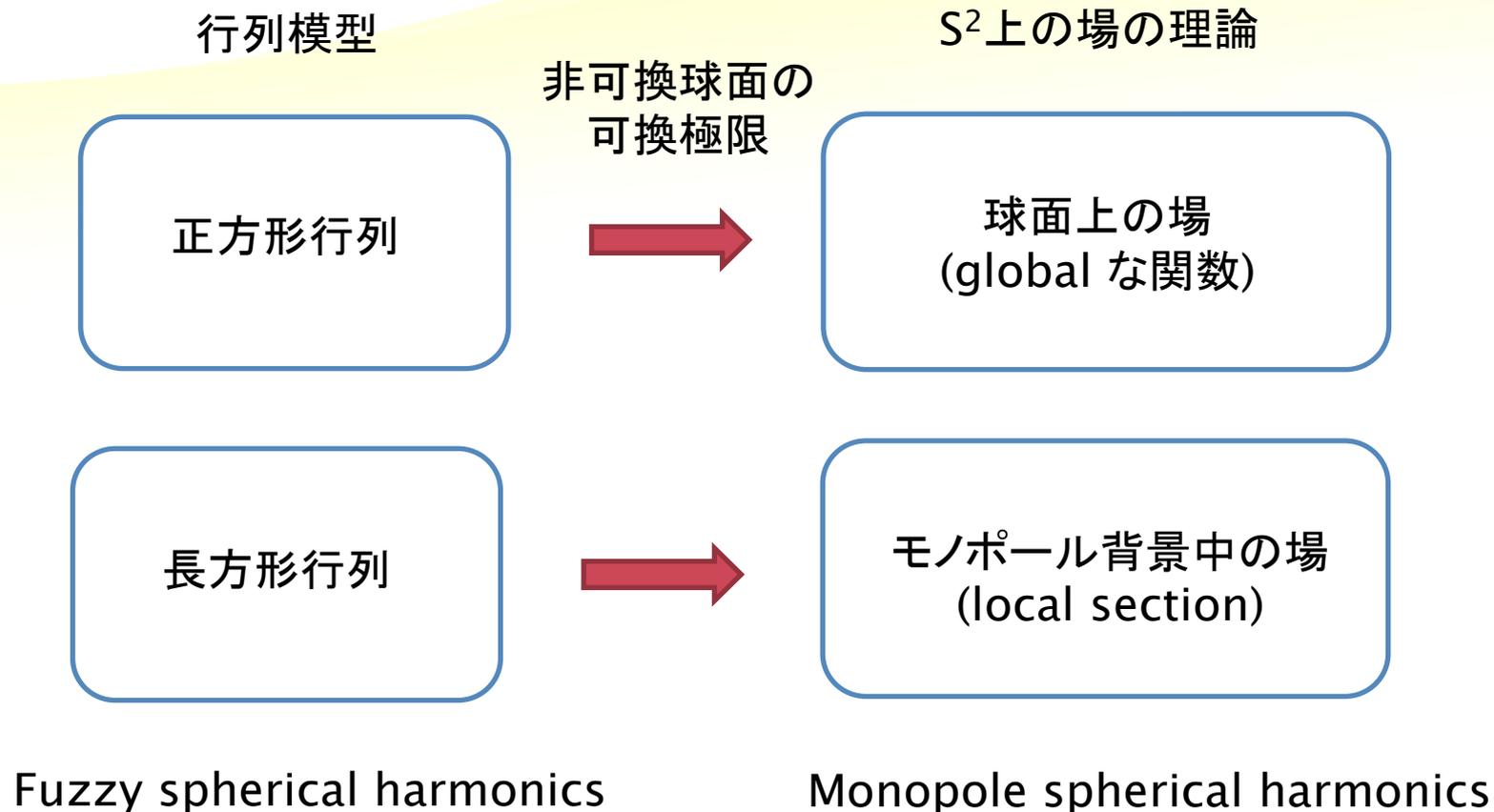
 $\frac{\nu}{2}$
 n_i

$$N \rightarrow \infty \quad \nu \rightarrow \infty \quad \frac{\nu}{N} = 1 \quad k \rightarrow \infty$$

このモノポール解周りの $R \times S^2$ 上のSYM理論 \Rightarrow $R \times S^3$ 上の $N=4$ SYM理論

Large N reduction

Monopoles on S^2 from Matrix Model



Monopole Spherical Harmonics

U(1) monopole背景中の場の基底

$$Y_{Jmq}(\Omega_2) \quad (|q| \leq J)$$

角運動量に下限

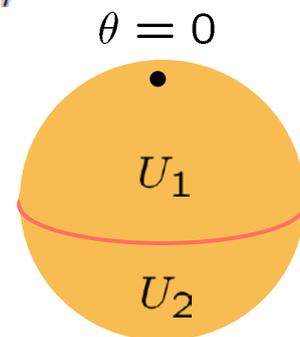
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_A^{(q)} \mathcal{L}_A^{(q)} Y_{Jmq} = J(J+1)Y_{Jmq} \\ \mathcal{L}_\pm^{(q)} Y_{Jmq} = \sqrt{(J \mp m)(J \pm m + 1)} Y_{Jm \pm 1q} \\ \mathcal{L}_3^{(q)} Y_{Jmq} = m Y_{Jmq} \end{array} \right.$$

$\mathcal{L}_A^{(q)}$ はモノポールが原点にある場合の角運動量演算子

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_1^{(q)} = i(\sin \varphi \partial_\theta + \cot \theta \cos \varphi \partial_\varphi) - q \frac{1 \mp \cos \theta}{\sin \theta} \cos \varphi. \\ \mathcal{L}_2^{(q)} = i(-\cos \varphi \partial_\theta + \cot \theta \sin \varphi \partial_\varphi) - q \frac{1 \mp \cos \theta}{\sin \theta} \sin \varphi. \\ \mathcal{L}_3^{(q)} = -i \partial_\varphi \mp q. \end{array} \right.$$

Patch によって形が異なる。

$$Y'_{Jmq} = e^{2iq\varphi} Y_{Jmq}$$



Fuzzy Spherical Harmonics

$$\hat{Y}_{Jm(jj')} = \sqrt{n} \sum_{r,r'} (-1)^{-j+r'} C_{jrj'-r'}^{Jm} |jr\rangle \langle j'r'|$$

[Grosse et al, Baez et al, Dasgupta et al]

$$|j - j'| \leq J \leq j + j'$$

\uparrow \uparrow
 下限 UV Cutoff

$$\begin{pmatrix} (2j' + 1) \\ \blacksquare \\ (2j + 1) \end{pmatrix} \quad \text{長方形行列の基底}$$

$$L_A \circ \hat{Y}_{Jm(jj')} = L_A^{(j)} \hat{Y}_{Jm(jj')} - \hat{Y}_{Jm(jj')} L_A^{(j')}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{L}_A \circ)^2 \hat{Y}_{Jm(jj')} = J(J+1) \hat{Y}_{Jm(jj')}, \\ \hat{L}_\pm \circ \hat{Y}_{Jm(jj')} = \sqrt{(J \mp m)(J \pm m + 1)} \hat{Y}_{Jm \pm 1(jj')}, \\ \hat{L}_3 \circ \hat{Y}_{Jm(jj')} = m \hat{Y}_{Jm(jj')}. \end{array} \right.$$

Commutative Limit

$$(2j' + 1) \rightarrow \infty$$

$$\left(\hat{Y}_{Jm}(jj') \right) (2j + 1) \rightarrow \infty$$

$$j - j' = q = \text{fixed}$$

この極限で、磁荷 q の
monopole harmonics
にmapできる。

◆ スペクトル

$$\hat{Y}_{Jm}(jj') : \begin{array}{l} |j - j'| \leq J \leq j + j' \\ -J \leq m \leq J \end{array} \rightarrow Y_{Jmq}(\Omega_2) : \begin{array}{l} |q| \leq J \\ -J \leq m \leq J \end{array}$$

◆ 関数同士の積(環)の構造

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \text{tr} \left\{ \left(\hat{Y}_{J_1 m_1}(j j'') \right)^\dagger \hat{Y}_{J_2 m_2}(j j') \hat{Y}_{J_3 m_3}(j' j'') \right\} &\rightarrow \sqrt{\frac{(2J_2 + 1)(2J_3 + 1)}{2J_1 + 1}} C_{J_2 m_2 J_3 m_3}^{J_1 q_1} C_{J_2 q_2 J_3 q_3}^{J_1 q_1} \\ &= \int \frac{d\Omega_2}{4\pi} \left(Y_{J_1 m_1 q_1} \right)^* Y_{J_2 m_2 q_2} Y_{J_3 m_3 q_3} \end{aligned}$$

$$\hat{Y}_{Jm}(jj') \leftrightarrow Y_{Jmq} \quad L_i \circ \leftrightarrow L_i^{(q)} \quad \frac{1}{n} \text{tr} \leftrightarrow \int \frac{d\Omega_2}{4\pi}$$

PWMM → SYM on $R \times S^2$ with monopoles

$$S_{PWMM} = \frac{1}{g^2} \int dt \operatorname{tr} \left\{ -\frac{1}{2} \left(X_i + \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} [X_j, X_k] \right)^2 + \dots \right\}$$

非可換球面解で可約表現のものを考える。 $X_i = L_i$

$$\hat{X}_i = L_i = \left(\begin{array}{c|c} L_i^{[j_1]} & \text{rectangle} \\ \hline \text{rectangle} & L_i^{[j_2]} \end{array} \right) \quad \text{長方形} \quad \text{同心円}$$

$$\begin{cases} 2j_1 + 1 = n + n_1 \\ 2j_2 + 1 = n + n_2 \end{cases} \quad n \rightarrow \infty \quad j_1 - j_2 = \frac{n_1 - n_2}{2} \text{ は固定}$$

この解周りのPWMMは可換極限で磁荷 $\phi = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ を持ったモノポール解の周りの $R \times S^2$ 上のSYMと等価である。

ここまでのまとめ

$R \times S^3$ 上のSYM
Planar 極限

次元簡約 ↓ ↑ ラージNリダクション

(モノポール解周りの)
 $R \times S^2$ 上のSYM

次元簡約 ↓ ↑ 非可換球面の構成

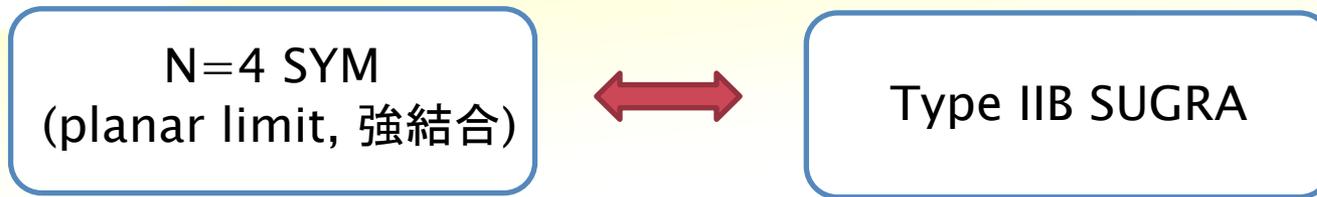
Plane wave 行列模型

- ① 4d Planar N=4 SYM
= PWMMのある真空周りの理論の
ラージN極限
- ② PWMMは数値計算可能
- ③ Planar N=4 SYMも数値計算可能

- ◆ massive な理論であり、
quench等が必要ない。
- ◆ 従ってPWMMの持つ対称性
{ ゲージ対称性
SU(2|4)対称性 (16 susy)
を全て保つことが出来る。
- ◆ InstantonはラージNで無視できる。

Deconfinement Phase Transition in the Weak Coupling Limit

◆ 有限温度でのAdS/CFT [Witten]

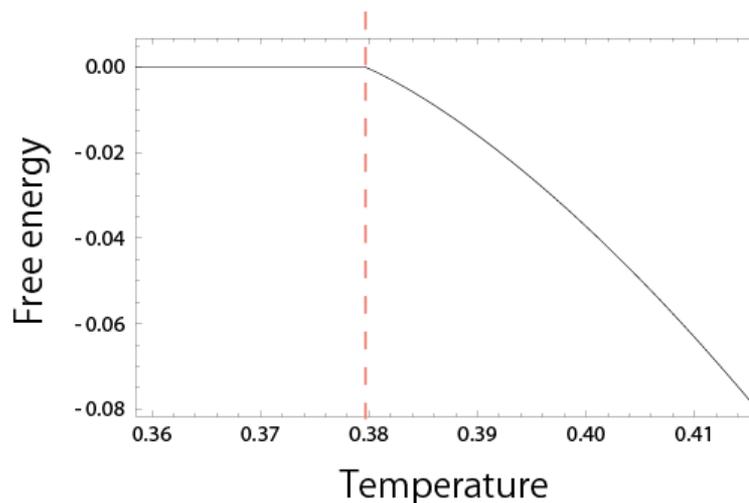


Deconfinement transition



Hawking-Page transition

◆ 弱結合(1-loop近似)における、 $R \times S^3$ 上のN=4 SYM のラージN相転移



[Sundborg, Aharony-Marsano-Minwalla-Papadodimas-Raamsdonk]

PWMMを用いた計算

- ◆ PWMMにおいて $N=4$ SYMを実現する古典解の周りで展開

$$X_A = \begin{pmatrix} \cdots & & & & \\ & L_A^{[j_{i-1}]} & & & \\ & & L_A^{[j_i]} & & \\ & & & L_A^{[j_{i+1}]} & \\ & & & & \cdots \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_{k \times k}$$

- ◆ S^1 方向のゲージ場が対角的で、定数のゲージをとる。

$$A(t) = \bigoplus_{I=1}^{\wedge} \mathbf{1}_{n_I} \otimes \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} \alpha_1^{(I)} & & \\ & \cdots & \\ & & \alpha_k^{(I)} \end{pmatrix} \quad \text{Moduli (holonomy)}$$

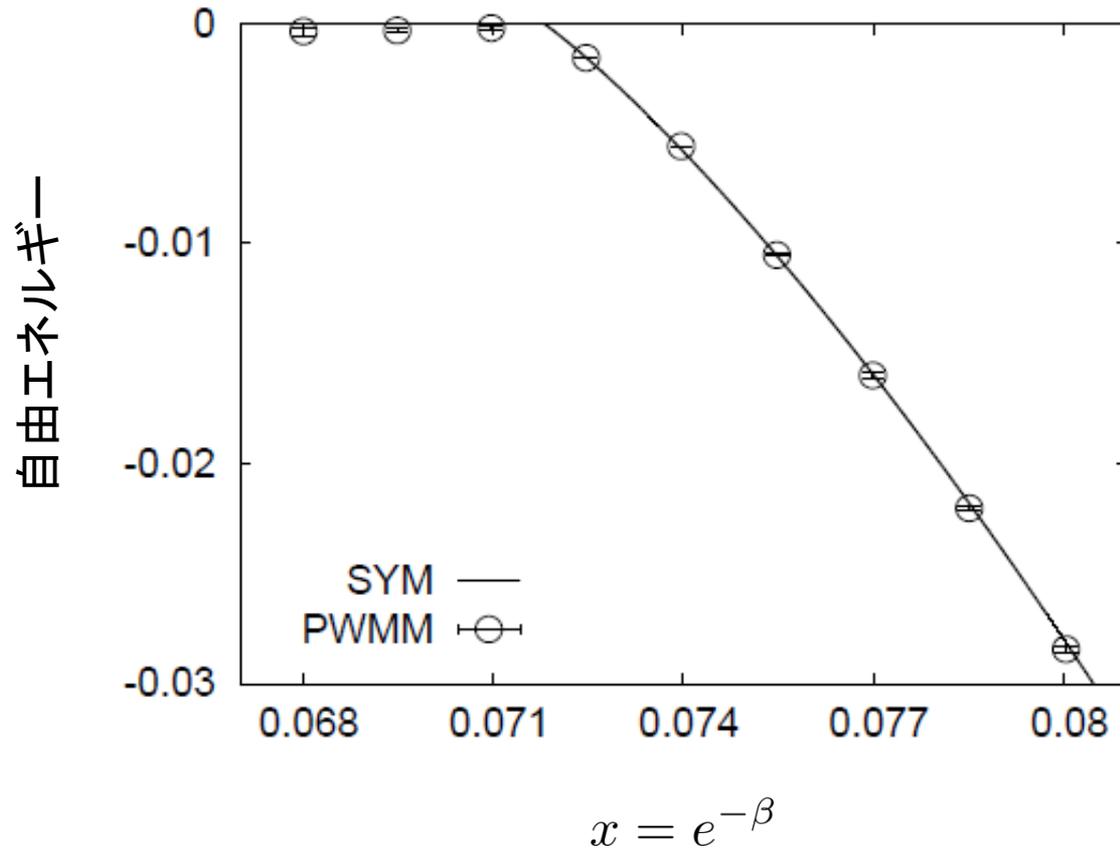
- ◆ ゲージ場のmoduli以外を1-loop近似で積分する。

1-loop 有効作用

$$S_{eff}^{PWMM}(\alpha) = 6S_s(\alpha) + S_v(\alpha) + 4S_f(\alpha) + S_V(\alpha)$$

- ◆ $\alpha_a^{(I)}$ の積分をモンテカルロ法を用いて数値的に行った。

結果



- ◆ 臨界温度は解析的に導くことができ、SYMの臨界温度と完全に一致する。
- ◆ 高温極限での T^4 の振る舞いも再現することができる。[Kitazawa-Matsumoto]

ベータ関数

- ◆ N=4 SYMは共形場理論 ⇒ ベータ関数=0
PWMMから出発して、これを示せるか？

$$S_{PW} = \frac{1}{g_{PW}^2} \int d\tau \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (D_\tau X_i)^2 + \frac{1}{2} \left(X_i + \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} [X_j, X_k] \right)^2 + \frac{1}{2} D_\tau \Phi_{AB} D_\tau \Phi^{AB} + \frac{\mu^2}{8} \Phi_{AB} \Phi^{AB} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} [X_i, \Phi_{AB}] [X_i, \Phi^{AB}] - \frac{1}{4} [\Phi_{AB}, \Phi_{CD}] [\Phi^{AB}, \Phi^{CD}] + \psi_A^\dagger D_\tau \psi^A + \frac{3\mu}{4} \psi_A^\dagger \psi^A \right. \\ \left. + \psi_A^\dagger \sigma^i [X_i, \psi^A] + \psi_A^\dagger \sigma^2 [\Phi^{AB}, (\psi_B^\dagger)^T] - (\psi^A)^T \sigma^2 [\Phi_{AB}, \psi^B] \right).$$

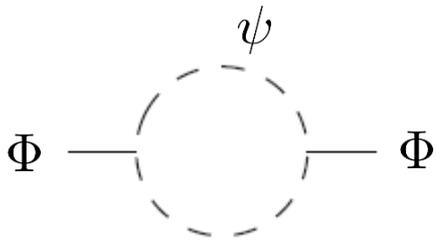
①理論を対応する真空周りで展開

②ゲージ固定

③ "調和展開" $\psi_A^{(t,s)\dagger} = \sum_{\kappa=\pm 1} \sum_{\tilde{U}=|j_s-j_t|}^{j_s+j_t} \sum_{m=-U}^U \psi_{A,Jm\kappa}^{(t,s)\dagger} \otimes \hat{Y}_{Jm(j_t j_s)}^{\kappa\dagger}$

④各モードについてファインマン則を作って計算

$$\langle \psi_{Jm\kappa}^{A(s,t)}(p)_{ij} \psi_{A',J'm'\kappa'}^{(s',t')\dagger}(p')_{kl} \rangle = \frac{g_{PW}^2}{n} \delta_{JJ'} \delta_{mm'} \delta_{\kappa\kappa'} \delta_{A'}^A \delta_{ss'} \delta_{tt'} \delta_{il} \delta_{jk} 2\pi \delta(p-p') \frac{(ip + \kappa\omega_J^\psi)}{p^2 + \omega_J^{\psi^2}}.$$



$$\begin{aligned}
 &= 32\mu n k (-1)^{m-(j_s-j_t)} \sum_{R_1=|j_s-j_u|}^{j_s+j_u} \sum_{R_2=|j_t-j_u|}^{j_t+j_u} (2J+1)(2R_1+1)(2R_2+1) \\
 &\quad \times \left[\frac{(R_1+1)(R_2+1)(R_1+R_2+\frac{3}{2})}{p^2 + \mu^2(R_1+R_2+\frac{3}{2})^2} \begin{Bmatrix} R_1 + \frac{1}{2} & R_1 & \frac{1}{2} \\ R_2 + \frac{1}{2} & R_2 & \frac{1}{2} \\ J & J & 0 \end{Bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R_1 R_2 (R_1+R_2+\frac{1}{2})}{p^2 + \mu^2(R_1+R_2+\frac{1}{2})^2} \begin{Bmatrix} R_1 & R_1 + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ R_2 & R_2 + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ J & J & 0 \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} R_2 & R_1 & J \\ j_s & j_t & j_u \end{Bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\sim \frac{k}{\mu} \sum_{u=-(\nu-1)/2}^{(\nu-1)/2} \sum_{R=|u/2|}^{n-1+u/2} \left\{ 8 - \frac{2}{R^2} \left(\frac{p^2}{\mu^2} + \frac{1}{4} \right) \right\}$$

Log発散

二次発散(すべての図を足すとキャンセル)

$$Z_\phi = 1 - \frac{4g_{PW}^2 k}{\mu^3 n} \log \nu.$$

同様の計算により、 $\beta = 0$ 分かる。

N=4 SYMにおける円形BPS Wilson Loop

$$W(C) = \text{Tr} P e^{i \int ds (\dot{x}^\mu A_\mu + i \theta^m |\dot{x}| X_m)}$$

$$\langle W(\text{circle}) \rangle$$

[Erickson-Semenoff-Zarembo,
Drukker-Gross, Pestun]

$$= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}M \frac{1}{N} \text{Tr} \exp(M) \exp\left(-\frac{2N}{\lambda} \text{Tr} M^2\right)$$

$M : N \times N$ Hermitian matrix

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda})$$

PWMMを用いた定式化から出発して再現できるか？

PWMMにおけるWilson Loop

cf. 非可換平面上のウィルソンループ [Ishibashi-Iso-Kawai-Kitazawa]

$$W(C) = \text{Tr} P \exp \left(\int_C \hat{A}_\mu dx^\mu \right)$$

連続極限で S^3 上のウィルソンループ演算子に帰着するような行列模型の演算子が構成できる。 [Ishii-Ishiki-Shimasaki-Ohta-Tsuchiya]

$$W(C) = \text{Tr} P \exp \left(\int_C X_A e_M^A(z) dz^M \right) \xrightarrow{\text{連続極限}} \text{Tr} P \exp \left(\int_C A_M(z) dz^M \right)$$

$e_M^A(z) dz^M$: S^3 上のright-invariant 1-form

- ◆ [Ishiki-Shimasaki-Tsuchiya] では、ラダー近似で計算した。[cf. Erickson-Semenoff-Zarembo]

$$\langle W(\text{circle}) \rangle_{\text{PWMM}}$$

$$= 1 + \text{circle with 1 red line} + \text{circle with 2 red lines} + \text{circle with 3 red lines} + \dots$$

$$\left(\text{circle with 3 red lines meeting at a vertex} \text{ 等、vertexの入ったものは無視} \right)$$

$$= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}M \frac{1}{N} \text{Tr} \exp(M) \exp \left(-\frac{2N}{\lambda} \text{Tr} M^2 \right)$$

↑
Planar極限

- ◆ [Asano-Ishiki-Okada-Shimasaki] では、局所化を用いてこれが厳密な結果であることを示した。

3.N=4 SYMの数値計算

数値計算の方法

◆ PWMMのnon-lattice simulation

1. Euclidean時間方向に、IR cutoff (逆温度) β を導入。 $\tau \in [0, \beta)$

2. ゲージ場 (static diagonal gauge)

$$A(t) = \frac{1}{\beta} \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$$

$\alpha_i \in [-\pi, \pi)$ は定数

他の場

$$X(t) = \sum_{n=-\Lambda}^{\Lambda} X_n e^{i\omega n t}$$

UV cutoff

3. α_i と各フーリエモードについてRHMCを行う

◆ 初期配位として、N=4 SYMに対応する配位を取って、その周りで揺らがせる。

$$X_A = \begin{pmatrix} \dots & & & & \\ & L_A^{[j_{i-1}]} & & & \\ & & L_A^{[j_i]} & & \\ & & & L_A^{[j_{i+1}]} & \\ & & & & \dots \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_{k \times k}$$

◆ cutoffの外挿

$$L_i = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & & \\ & \boxed{2} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_{2 \times 2}$$

$$\Lambda = 12$$

$$\beta = 3.25 \sim 10$$

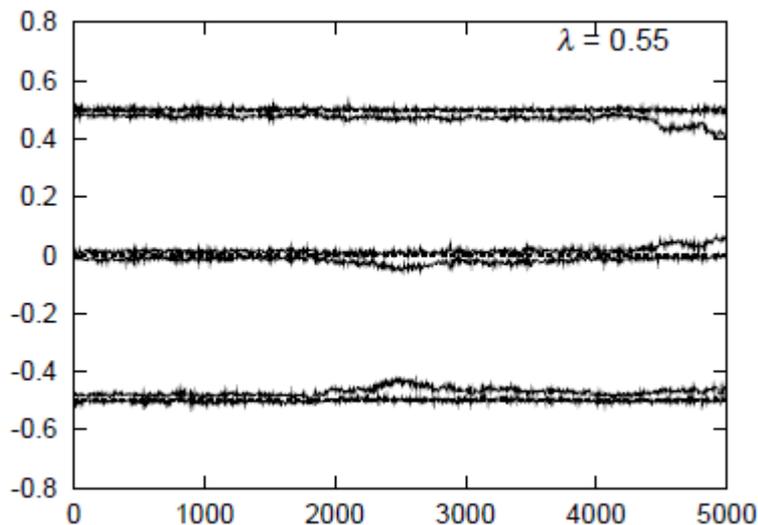
Instanton振幅

◆ 自由度 = $(N^2 - 1)(2\Lambda + 1) = 875 \sim 4^4$ 格子のSU(2)ゲージ理論

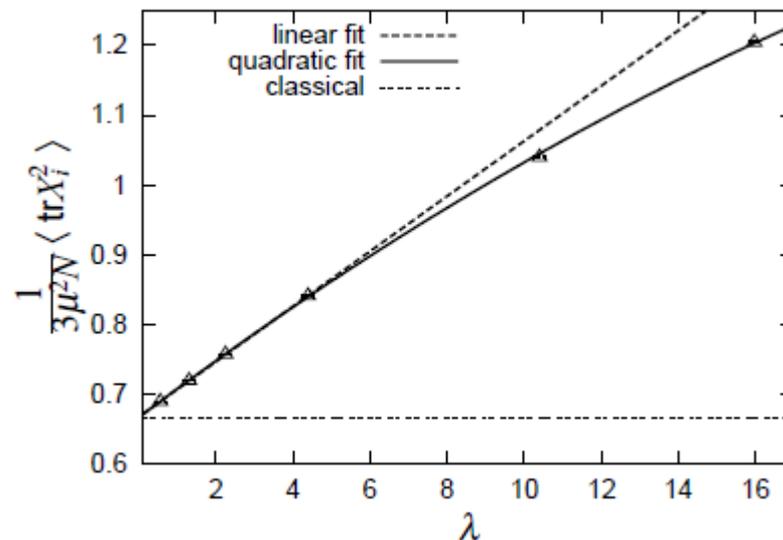
$$\sim e^{-\frac{N}{\lambda}}$$

◆ 大きな行列サイズを取れなかったため他の真空に移ってしまう可能性がある。

X_3 の固有値



二次のカシミア



(古典的には $\left\{ 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$)

R⁴上のSYMにおけるChiral primary演算子

◆ Chiral primary 演算子

$$\mathcal{O}(x) = T_{a_1 a_2 \dots a_n} \text{tr}(X_{a_1} X_{a_2} \dots X_{a_n})$$

$$\left[\begin{array}{l} X_a : \text{SO}(6) \text{ scalar} \\ T_{a_1 \dots a_n} : \text{traceless sym} \\ \text{tensor} \end{array} \right]$$

◆ 共形不変性から期待値の形は決まる。

・ 2点関数

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1) \mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2) \rangle = \frac{c_{\Delta_1} \delta_{\Delta_1 \Delta_2}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}$$

$$\left[\Delta_i : \text{演算子の共形次元} \right]$$

・ 3点関数

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1) \mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2) \mathcal{O}_{\Delta_3}(x_3) \rangle$$

$$= \frac{c_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |x_2 - x_3|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} |x_3 - x_1|^{\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2}}$$

Chiral primary演算子を持つ重要な性質

- ◆ c_{Δ} (2点関数の係数)はcouplingに依らない。(非繰り込み定理)

(Near) extremal な多点関数に対しても、非繰り込み定理は示されている。

$$\Delta_1 = \Delta_2 + \dots + \Delta_p (-2) \quad [\text{Eden-Howe-Sokatchev-West}]$$

- ◆ $\frac{c_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}}{\sqrt{c_{\Delta_1} c_{\Delta_2} c_{\Delta_3}}}$ や、その多点関数版はSUGRAから計算できる。[GKP, Witten]

$$\text{(例)} \quad \left. \frac{c_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}}{\sqrt{c_{\Delta_1} c_{\Delta_2} c_{\Delta_3}}} \right|_{\text{SUGRA}} = \left. \frac{c_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}}{\sqrt{c_{\Delta_1} c_{\Delta_2} c_{\Delta_3}}} \right|_{\text{SYM, } N \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 0}$$

一般の規格化された3点関数に対する、弱い形の非繰り込み定理

$$\left. \frac{c_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4}}{\sqrt{c_{\Delta_1} c_{\Delta_2} c_{\Delta_3} c_{\Delta_4}}} \right|_{\text{SUGRA}} = \dots$$

一般の規格化された4点関数は繰り込みを受ける

- ◆ このような性質が数値計算から理解できるか？

計算した演算子 (例) 2点関数の場合

$$\langle \text{tr} Z^J(x_1) \text{tr} Z^{\dagger J}(x_2) \rangle_{R^4} = \frac{c_J}{|x_1 - x_2|^{2J}} \left[Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_4 + iX_5) \right]$$

$R^4 \rightarrow R \times S^3$ への
mapping
(共形変換)

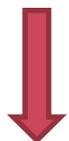


$$\begin{aligned} ds_{R^4}^2 &= dr^2 + r^2 d\Omega_3^2 \quad (r = e^\tau) \\ &= e^{2\tau} (d\tau^2 + d\Omega_3^2) \end{aligned}$$

← $ds_{R \times S^3}^2$

$$\langle \text{tr} Z^J(x_1) \text{tr} Z^{\dagger J}(x_2) \rangle_{R \times S^3} = \frac{c_J e^{J(\tau_1 + \tau_2)}}{|x_1 - x_2|^{2J}}$$

S^3 上で積分
(例) $J = 2$ の場合



$$\int d\Omega_3 \int d\Omega'_3 \langle \text{tr} Z^2(\tau, \Omega_3) \text{tr} Z^{\dagger 2}(0, \Omega'_3) \rangle_{R \times S^3} = \frac{c_2 e^{-\mu\tau}}{1 - e^{-\mu\tau}}$$



Large N reduction

$$\langle \text{tr} Z^2(\tau) \text{tr} Z^{\dagger 2}(0) \rangle_{\text{PWMM}}$$

さらにこれをフーリエ変換して
運動量空間の相関関数を数値計算

Free な場合には、解析的な計算から、

$$\langle \text{tr} Z^2(\tau) \text{tr} Z^{\dagger 2}(0) \rangle_{\text{PWMM}} = c \sum_{s,t=-\nu/2}^{\nu/2} \sum_{J=|j_s-j_t|}^{j_s+j_t} \sum_{m=-J}^J \frac{e^{-\mu(2J+1)\tau}}{(2J+1)^2}$$
$$\rightarrow \frac{c_2 e^{-\mu\tau}}{1 - e^{-\mu\tau}} \quad \text{SYMの結果を再現できる}$$

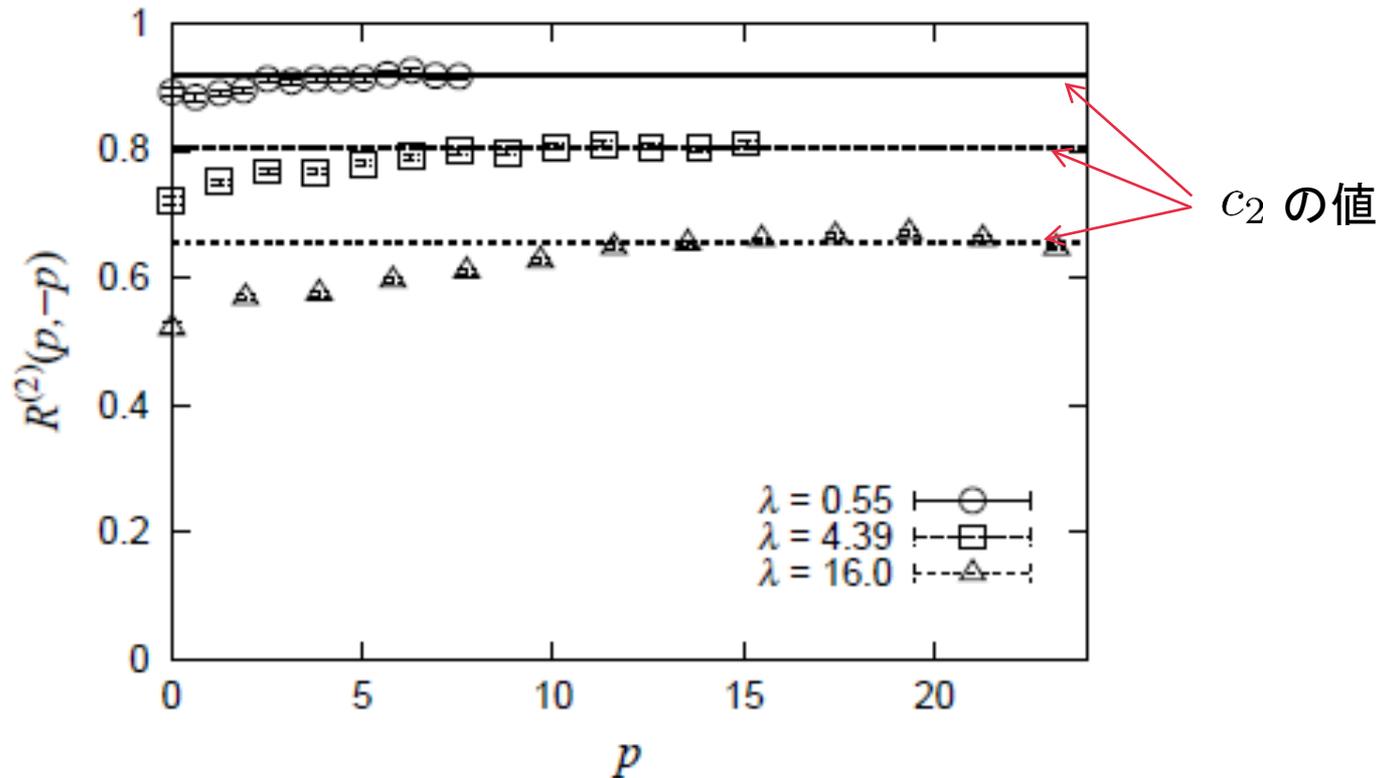
連続極限

結果: 二点関数

$$R^{(2)}(p, -p) = \frac{\langle \tilde{O}_{45}(p) \tilde{O}_{54}(-p) \rangle_{PW}}{\langle \tilde{O}_{45}(p) \tilde{O}_{54}(-p) \rangle_{PW, free}}$$

◆ N=4 SYMでは $R^{(2)}(p, -p) = 1$ (非繰り込み定理) $\tilde{O}_{ij} = \text{Tr} X_i X_j$

◆ 我々の結果

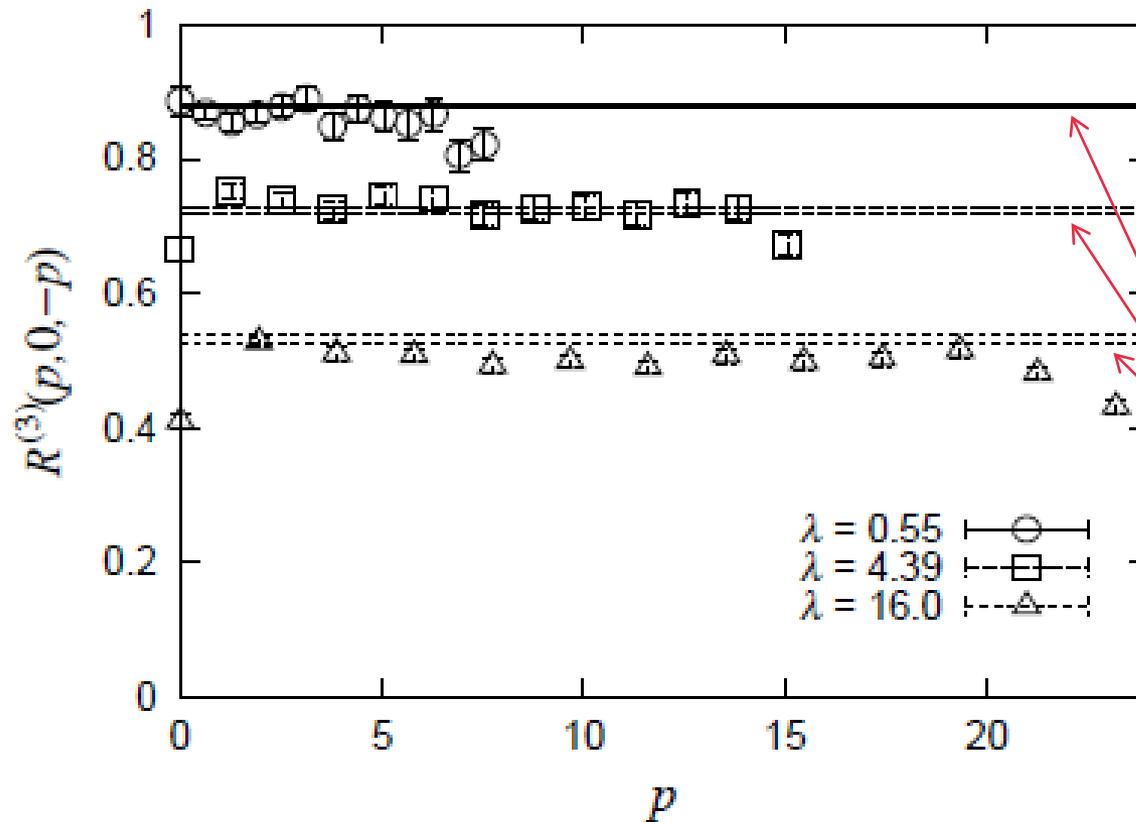


連続極限では1に近づくか？

三点関数

$$R^{(3)}(p, 0, -p) = \frac{\langle \tilde{\mathcal{O}}_{45}(p) \tilde{\mathcal{O}}_{56}(0) \tilde{\mathcal{O}}_{64}(-p) \rangle_{\text{PW}}}{\langle \tilde{\mathcal{O}}_{45}(p) \tilde{\mathcal{O}}_{56}(0) \tilde{\mathcal{O}}_{64}(-p) \rangle_{\text{PW, free}}}$$

- ◆ N=4 SYMでは $R^{(3)}(p, 0, -p) = 1$ (非繰り込み定理)
- ◆ 我々の結果

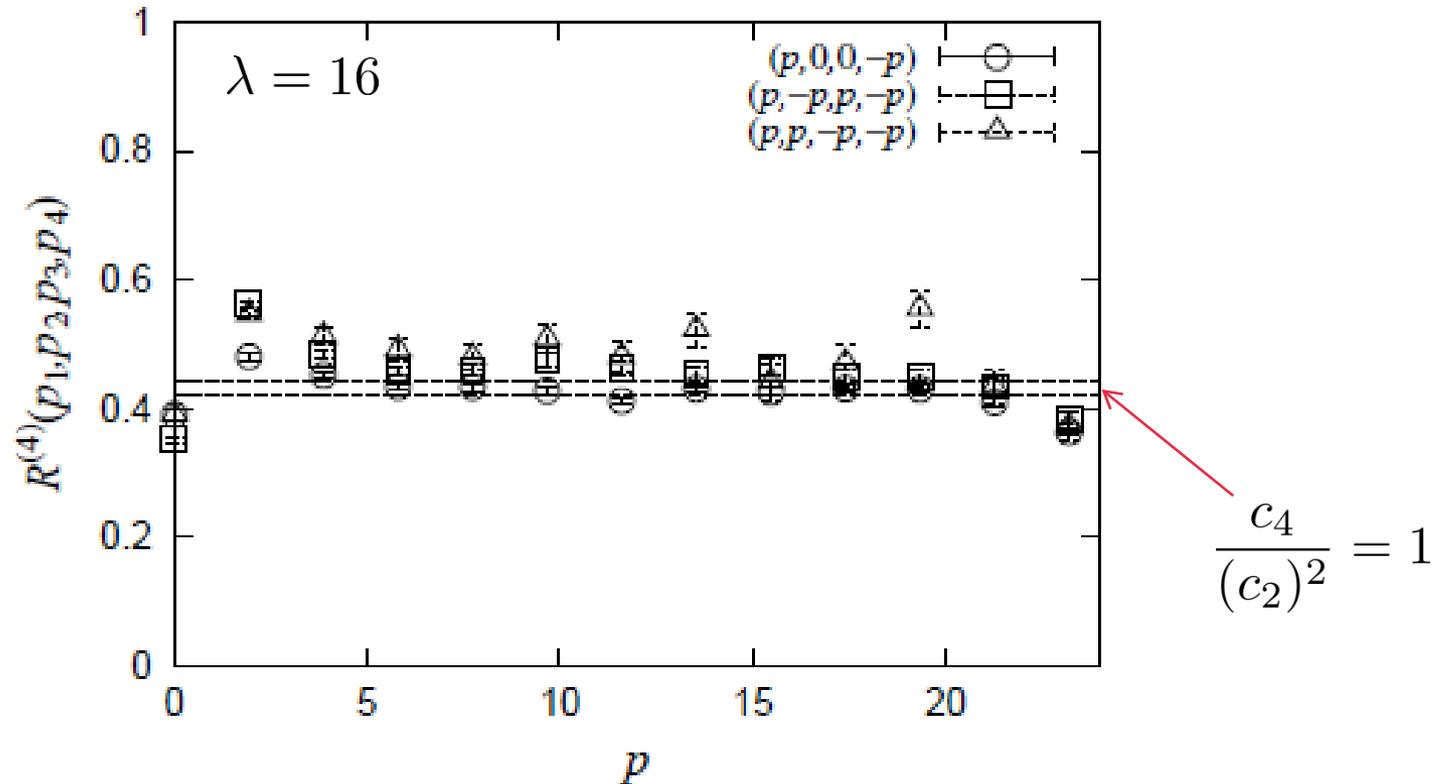


$$\frac{c_3}{(c_2)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

弱い形の非繰り込み定理は成り立っているように見える。

四点関数

$$R^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{\langle \tilde{\mathcal{O}}_{45}(p_1) \tilde{\mathcal{O}}_{56}(p_2) \tilde{\mathcal{O}}_{67}(p_3) \tilde{\mathcal{O}}_{74}(p_4) \rangle_{\text{PW}}}{\langle \tilde{\mathcal{O}}_{45}(p_1) \tilde{\mathcal{O}}_{56}(p_2) \tilde{\mathcal{O}}_{67}(p_3) \tilde{\mathcal{O}}_{74}(p_4) \rangle_{\text{PW, free}}}$$



規格化された4点は最大30%程度繰り込まれる。

ずれのオーダーは重力側と一致する。運動量依存性は一致しない。

円形BPSウィルソンループ

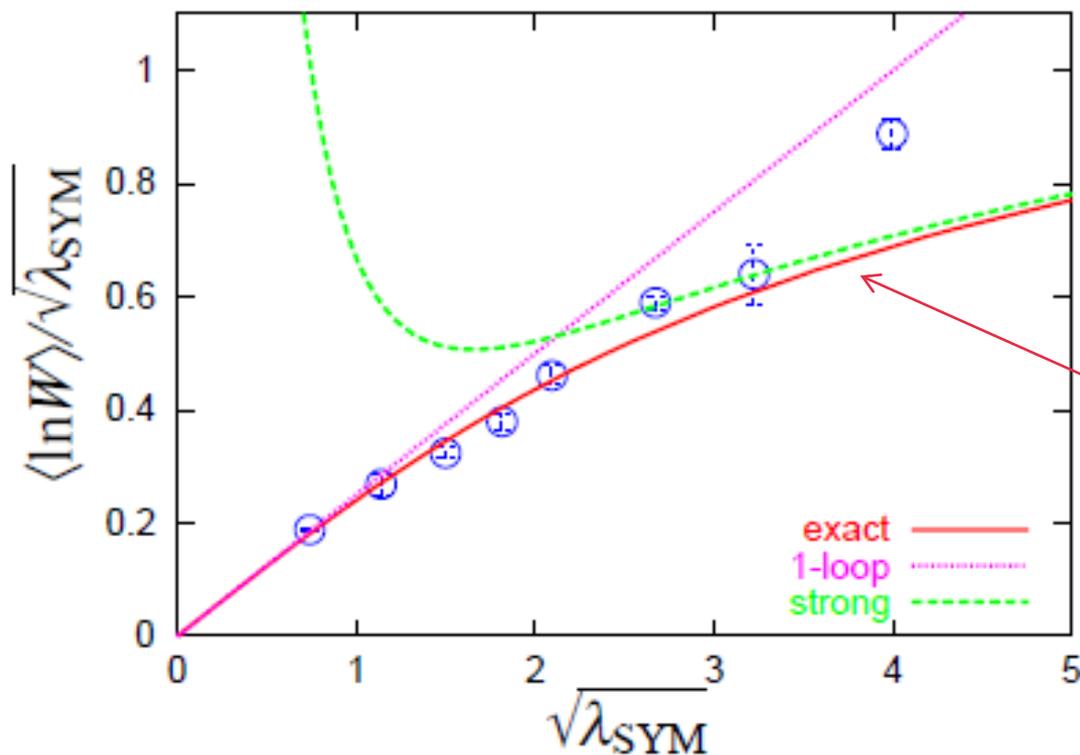
$$L_i = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \\ & \boxed{2} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_{k \times k}$$

$$\beta = 3 \sim 10$$

$$\begin{cases} \Lambda = 6, 8, 10, 12 \\ k = 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$



無限大へ外挿



Gaussian Matrix model (exactな結果)の planarでの値

まとめ

- ◆ ラージNリダクション: S^3 上のゲージ理論は、その次元簡約で得られる行列模型をもちいて記述することが出来る。
- ◆ $R \times S^3$ 上のplanar $N=4$ SYM理論 = PWMMのあるラージN極限
PWMMは数値計算可能(lattice, non-lattice)なので、上の関係に基づいて $N=4$ SYMの数値計算も可能となる。
- ◆ 1-loop自由エネルギー, 1-loop beta関数, 円形Wilson loop(all order)が、この定式化に基づいて正しく再現された。
- ◆ $N=4$ SYMのChiral primary演算子の2,3,4点関数と円形Wilson loopをRHMCにより計算した。

展望

- ◆ 大きなサイズの行列模型の数値計算が可能になれば、 $N=4$ SYMのより精密な数値計算が可能になるはず。

AdS/CFTの精密検証

4. Large N Reduced Model for Chern–Simons Theory on S^3

Large N Reduction for Chern-Simons Theory on S^3

[Ishii-Ishiki-Shimasaki-Ohta-Tsuchiya]

[Ishiki-Ohta-Shimasaki-Tsuchiya]

S^3/Z_k 上のChern-Simons理論



ラージNリダクション
(又はmatrix T-duality) の
非自明なU(1)束への拡張

[Ishiki-Ohta-Shimasaki-Tsuchiya]

S^2 上のBF理論
(二次元Yang-Mills理論)

[Shimasaki's Poster]



非可換球面の構成

$N=1^*$ 行列模型

$$S_{MM} = \frac{1}{g_{MM}^2} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} X_i^2 + \frac{i}{6} \epsilon_{ijk} X_i [X_j, X_k] \right)$$

Path Integration of N=1* Matrix Model

$$Z_{MM} = \int DX_i e^{iS_{MM}} \quad S_{MM} = \frac{1}{g_{MM}^2} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} X_i^2 + \frac{i}{6} \epsilon_{ijk} X_i [X_j, X_k] \right)$$

◆ $\begin{cases} \Phi \equiv X_3 \\ Z \equiv X_1 + iX_2 \end{cases}$ と場を再定義する。

◆ Φ を対角化するゲージをとる。

◆ Z と \bar{Z} を先に積分する。

$$Z_{MM} = \frac{1}{M!} \int \prod_i d\phi_i \prod_{i \neq j} \frac{\phi_i - \phi_j}{\phi_i - \phi_j + 1 - i\epsilon} e^{-\frac{i}{g^2} (1-i\epsilon) \sum_i \phi_i^2}$$

◆ S^3 上のChern-Simons 理論を記述する部分を抜き出す必要がある。

$$\frac{1}{x - i\epsilon} = \text{P.V.} \frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$$

Extracting Chern–Simons on S^3

$$Z_{MM} = \sum_{\mathcal{R}} V_{\mathcal{R}} \quad \mathcal{R}: \text{SU}(2) \text{ の } M \text{ 次元表現。}$$

$\{(2j_s + 1, N_s)\}$ によって指定される。

$$V_{\mathcal{R}} = C_{\mathcal{R}} \int \prod_{s,i} d\phi_{si} \text{P.V.} \prod_{s,t,i,j} \frac{(\phi_{si} - \phi_{tj})^2 + (2j_s - 2j_t)^2}{(\phi_{si} - \phi_{tj})^2 + (2j_s + 2j_t + 2)^2} e^{-\frac{1}{2g^2} \sum_{s,i} (2j_s + 1) \phi_{s,i}^2}$$

s, t は既約表現を指定 $1 \leq i_s \leq N_s$ は重複度

S^3 を実現する表現 $(2j_s + 1, N_s) = (N_0 + s, N)$

$$V_{\mathcal{R}_{S^3}} \rightarrow \int \prod_{s,i} d\phi_{si} \prod_{s,t,i,j} \{(\phi_{si} - \phi_{tj})^2 + (s - t)^2\} e^{-\frac{1}{2g^2} \sum_{s,i} \phi_{s,i}^2}$$

$N_0 \rightarrow \infty$

$$-T/2 \leq s, t \leq T/2 \quad 1 \leq i, j \leq N$$

この分配関数で記述される理論は $T \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ で
 S^3 上のラージ N の Chern–Simons 理論を記述していると期待できる。

Free Energy

$$F_{\mathcal{R}_{S^3}} \equiv \log V_{\mathcal{R}_{S^3}}$$

$$= N^2 T \left\{ \frac{\pi^2}{6} g^2 N + \frac{\pi^4}{72} g^4 N^2 + \frac{\pi^4}{360} g^4 + 0 \times g^6 N^3 \right. \\ \left. + \left(\frac{\pi^6}{1134} - \frac{1}{6T} \sum_{s \neq t \neq v \neq s} \frac{1}{(s-t)^2 (t-u)^2 (u-v)^2} \right) g^6 N + \mathcal{O}(g^8) \right\}$$

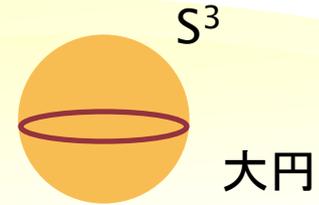
一方、 S^3 上のChern-Simons理論では、

$$F_{CS} \equiv \log Z_{CS} = \frac{\pi^2}{6} N(N^2 - 1) + \sum_{j=1}^N (N-j) \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{j^2 g^4}{2n^2} \right)$$

$$= N^2 \left\{ \frac{\pi^2}{6} g^2 N - \frac{\pi^2}{6} \frac{g^2}{N} + \frac{\pi^4}{72} g^4 N^2 + \frac{\pi^4}{24} g^4 + 0 \times g^6 N^3 + \mathcal{O}(g^8) \right\}$$

$$\text{ただしここで } g^2 \equiv \frac{1}{\pi(k+N)}$$

VEV of Unknot Wilson Loop



$$\begin{aligned} & \frac{1}{M} \langle e^{2\pi\Phi} \rangle_{\mathcal{R}_{S^3}} \\ &= 1 + \boxed{\pi^2 g^2 N} + \boxed{\frac{2\pi^4}{3} g^4 N^2} + \frac{\pi^4}{6} g^4 + \boxed{\frac{\pi^6}{3} g^6 N^3} + \frac{7\pi^6}{30} g^6 N + \mathcal{O}(g^8) \end{aligned}$$

一方、 S^3 上のChern-Simons理論において、

$$\begin{aligned} & \langle W(\text{unknot}) \rangle_{CS} & x_i &= e^{\pi^2 g^2 (N-2i+1)} \\ & = e^{\frac{\pi^2 g^2 (N^2-1)}{N}} S_{\square}(x_i) \leftarrow \text{シューア関数} & g^2 &= \frac{1}{\pi(k+N)} \end{aligned}$$

$$= 1 + \boxed{\pi^2 g^2 N} + \boxed{\frac{2\pi^4}{3} g^4 N^2} - \frac{\pi^4}{6} g^4 + \boxed{\frac{\pi^6}{3} g^6 N^3} - \frac{\pi^6}{6} g^6 N + \mathcal{O}(g^8)$$