

# ローレンツ型IIB行列模型における 宇宙膨張の数値的研究

西村 淳 (KEK & 総研大)

研究会“離散的手法による場と時空のダイナミクス”

2013年9月27日～30日

KEK, つくば

# 1. 序

## 素粒子論

Standard Model

SM-likeなヒッグス粒子  
の発見 (@ LHC)

ヒッグス粒子  
フェルミオン(3 世代)  
ゲージ群  
の起源は何か？

階層性問題

## 宇宙論

インフレーションとビッグバン理論

CMB (WMAP, PLANCK)  
銀河の構造形成  
元素合成

インフラトン及びそのポテンシャル  
初期条件  
暗黒物質、暗黒エネルギー  
の起源は何か？

宇宙項問題

現象論的模型の  
確立

実験や観測

基礎的理解の欠如

深刻な「naturalness」  
の問題

これらすべての問題が超弦理論によって解けるかもしれない！

ストリング現象論

ストリング宇宙論

# 超弦理論における最も基礎的な問題

## 時空の次元

(整合性から10次元の時空が要請される。)

### 従来のアプローチ:

- 余剰次元をコンパクト化する



無限個の **摂動論的真空**

様々な { 時空の次元  
ゲージ対称性  
物質場 (世代数)

- D-ブレーン (ある種の非摂動的効果を表す)

ストリング現象論とストリング宇宙論  
双方の内容を豊かなものにしたが。。

交差 D-ブレーン模型  
D-ブレーン・インフレーション  
フラックス・コンパクト化。。

あまりにも多くの模型が現れ、予言能力なし !!!

しかし、こういった見方が  
主として摂動論的な超弦理論の研究に基づく  
ということをおぼろげに忘れてはいけません。

（せいぜいD-ブレーンbranesの存在によって  
表される程度の非摂動効果しか考慮されていない。）



超弦理論を完全に非摂動的な枠組みの中で調べたら、  
全く新しい見方が現れてくるのではないかと。

c.f.) QCDにおける格子ゲージ理論

Cクォークの閉じ込め, ハドロンの質量スペクトル, etc.

(これらのことは、摂動論では決して理解することはできない!!!)

# タイプ IIB 行列模型 (石橋, 川合, 北澤, 土屋, 1996)

## 超弦理論の非摂動的定式化

(10次元のタイプ type IIB 超弦理論に基づく)

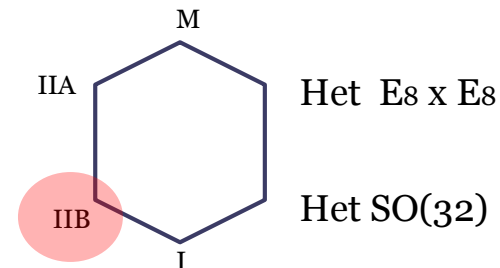
- 摂動論的定式化とのつながりは、10次元のタイプ IIB 超弦理論を考えることにより、直接見える。

worldsheet action,  
light-cone string field Hamiltonian, etc.

- “one-matrix model” (非臨界弦の非摂動的定式化として確立)  
の自然な拡張

行列模型に現れる Feynman diagram を弦の世界面とみなす

- 弦理論の双対性の背後に存在する「唯一の理論」  
に対する非摂動的定式化と期待される



(摂動論的に定式化される他のタイプの理論は  
タイプ IIB 行列模型の摂動的真空として表現されるだろう)

# タイプIIB行列模型

SO(9,1) 対称性

$$S_b = -\frac{1}{4g^2} \text{tr}([A_\mu, A_\nu][A^\mu, A^\nu])$$

$$S_f = -\frac{1}{2g^2} \text{tr}(\Psi_\alpha (C \Gamma^\mu)_{\alpha\beta} [A_\mu, \Psi_\beta])$$

$N \times N$  エルミート行列

$A_\mu$  ( $\mu = 0, \dots, 9$ ) Lorentz vector

$\Psi_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, 16$ ) Majorana-Weyl spinor

ローレンツ計量  $\eta = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$   
を用いて添え字を上げ下げする。

Wick 回転 ( $A_0 = -iA_{10}$ ,  $\Gamma^0 = i\Gamma_{10}$ )

➡ ユークリッド型の行列模型 SO(10) 対称性

# ローレンツ型 v.s. ユークリッド型

15年もの間、誰もローレンツ型の模型に手をつけなかったのには理由がある。

$$S_b \propto \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -2 \text{tr}(F_{0i})^2 + \text{tr}(F_{ij})^2$$

$$F_{\mu\nu} = -i[A_\mu, A_\nu]$$

逆符号！

極めて不安定な系

ひとたびユークリッド化すれば,  $A_0 = -iA_{10}$

$$S_b \propto \text{tr}(F_{\mu\nu})^2$$

正定値！

flat direction (  $[A_\mu, A_\nu] \sim 0$  ) は量子効果で持ちあがる。

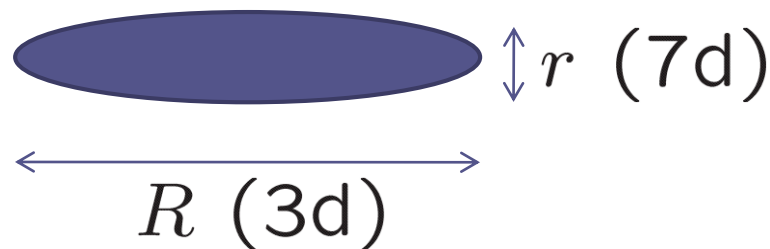
Aoki-Iso-Kawai-Kitazawa-Tada ('99)

ユークリッド型の模型は **カットオフなしでwell defined**

Krauth-Nicolai-Staudacher ('98),

Austing-Wheater ('01)

# 最近の発展



- ユークリッド型の模型

$$\text{SSB} : \text{SO}(10) \rightarrow \text{SO}(3)$$

$$\frac{R}{r} \sim 5 \quad \begin{array}{l} \text{➤ これらの結果の解釈は、実のところよくわからない。} \\ \text{➤ ふつうの場の理論と異なり、Wick rotationが正当化できない！} \end{array}$$

- ローレンツ型の模型

- IRのカットオフを入れることにより **well-defined** にできる。  
それらのカットオフは ラージ  $N$  の極限で外せる。
- **実時間に対する発展** が行列の配位から引き出せる。
- **9d空間から3dの膨張宇宙が現れる** (SSB), **インフレーション**, **ビッグバン**, ...
- **宇宙項問題** に対する自然な解決
- **Standard Model** の実現 (土屋氏の講演)

ローレンツ型のタイプIIB行列模型は、確かに超弦理論の正しい非摂動的定式化になっており、実際、我々の宇宙を記述している



# 目次

1. 序
2. ユークリッド型のタイプ IIB 行列模型
3. ローレンツ型のタイプ IIB 行列模型
4. 微視的な 9 d 空間から膨張する 3d 宇宙へ
5. 指数関数的膨張とベキ則的膨張
6. さらに時間が経過した後の時間発展
7. まとめと展望

## 2. ユークリッド型のタイプIIB行列模型

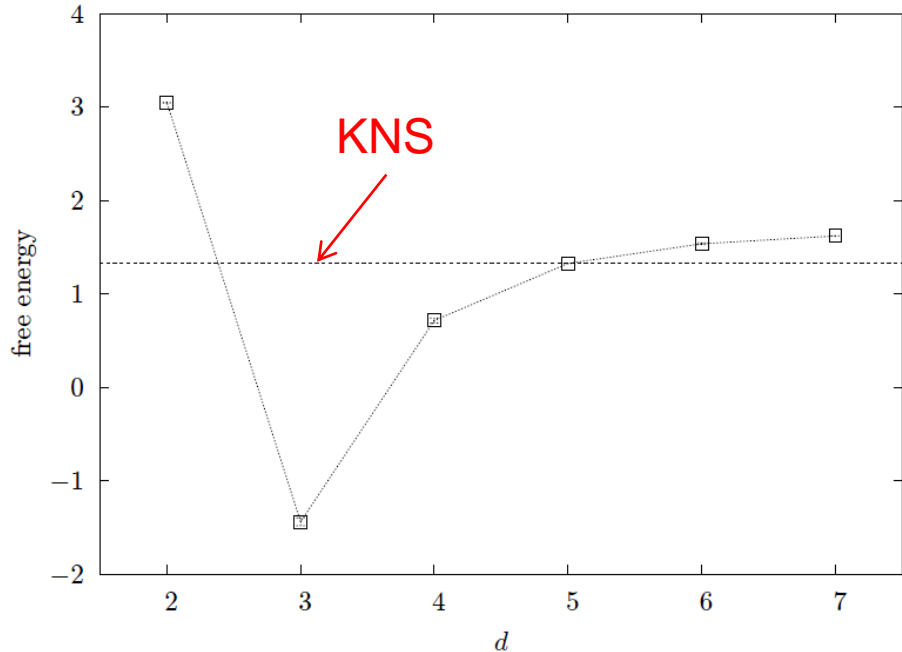
J.N.-Okubo-Sugino, JHEP1110(2011)135, arXiv:1108.1293

Aoyama-J.N.-Okubo, Prog.Theor.Phys. 125 (2011) 537, arXiv:1007.0883

Anagnostopoulos -Azuma-J.N., arXiv:1306.6135

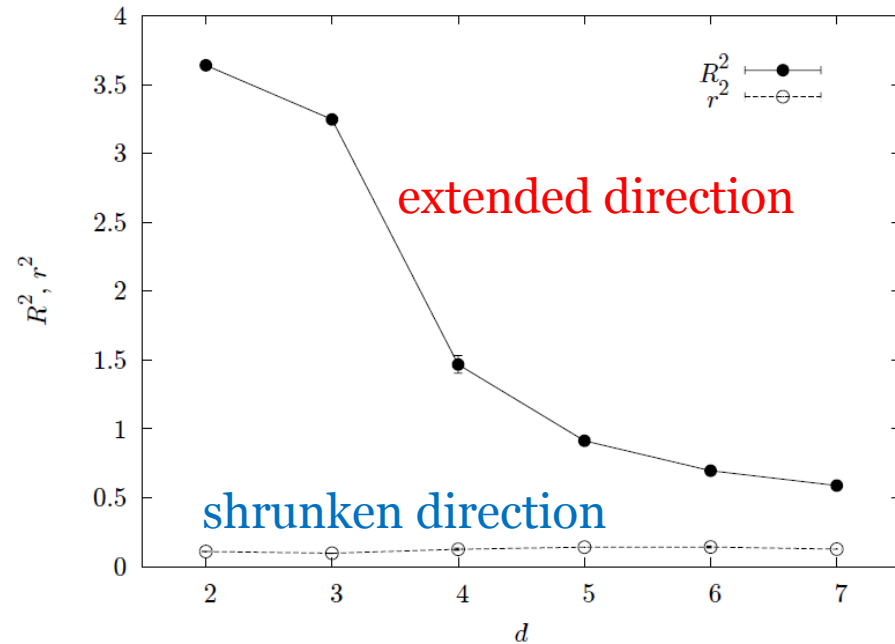
# ガウス展開法に基づく最新の結果

J.N.-Okubo-Sugino, JHEP1110(2011)135, arXiv:1108.1293



d=3 が自由エネルギーの最小値を与える

$$\text{SO}(10) \xrightarrow{\text{SSB}} \text{SO}(3)$$



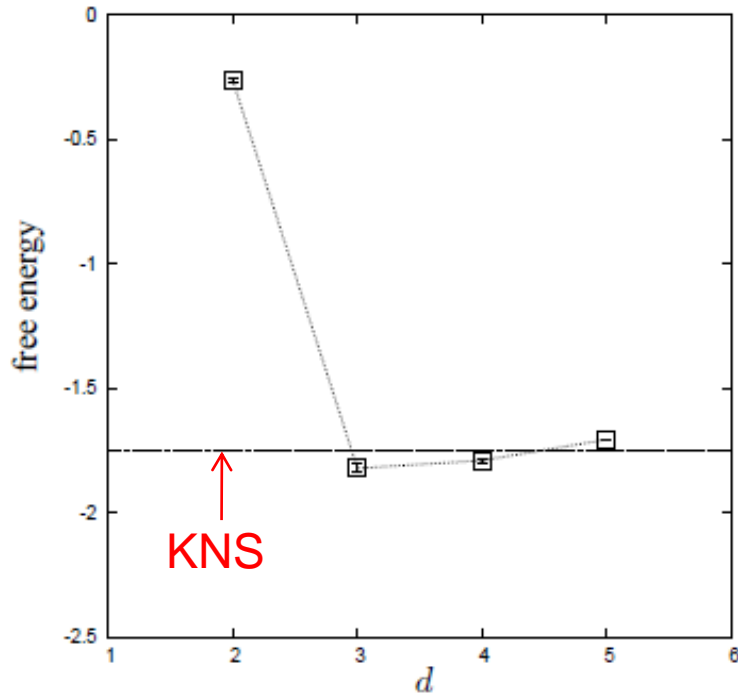
universal shrunken direction

〔 時空の広がり、すべての方向に有限。 〕

これはユークリッド型のタイプIIB行列模型の興味深い力学的性質。しかし、その物理的意味は、よくわからない。

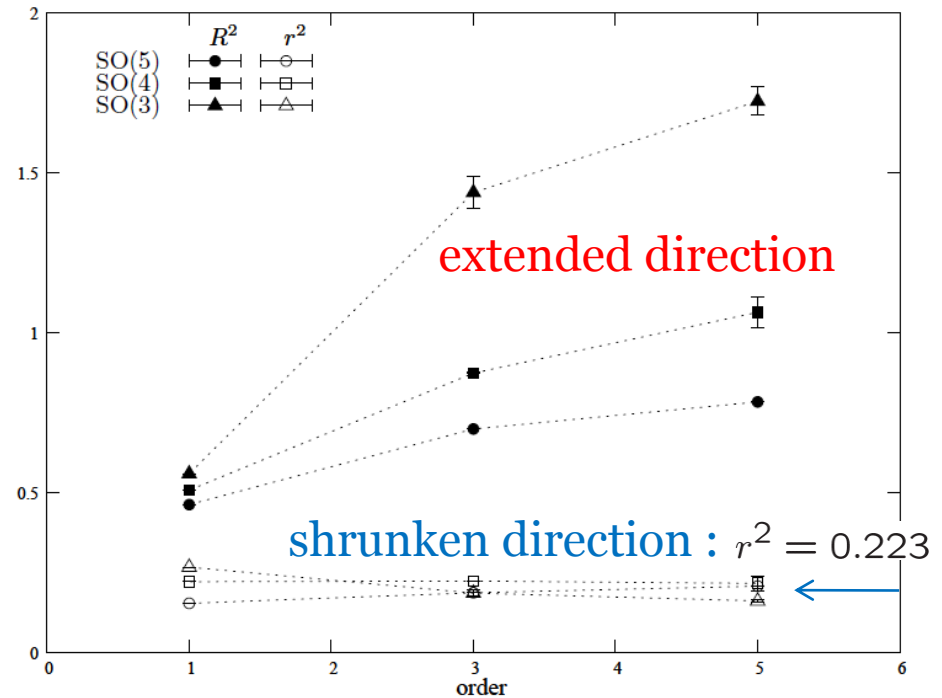
# 6d SUSY模型に対する結果 (ガウス展開法に基づく)

Aoyama-J.N.-Okubo, Prog.Theor.Phys. 125 (2011) 537, arXiv:1007.0883



$d=3$  が自由エネルギーの最小値を与える。

$$\text{SO}(6) \xrightarrow{\text{SSB}} \text{SO}(3)$$



universal shrunken direction

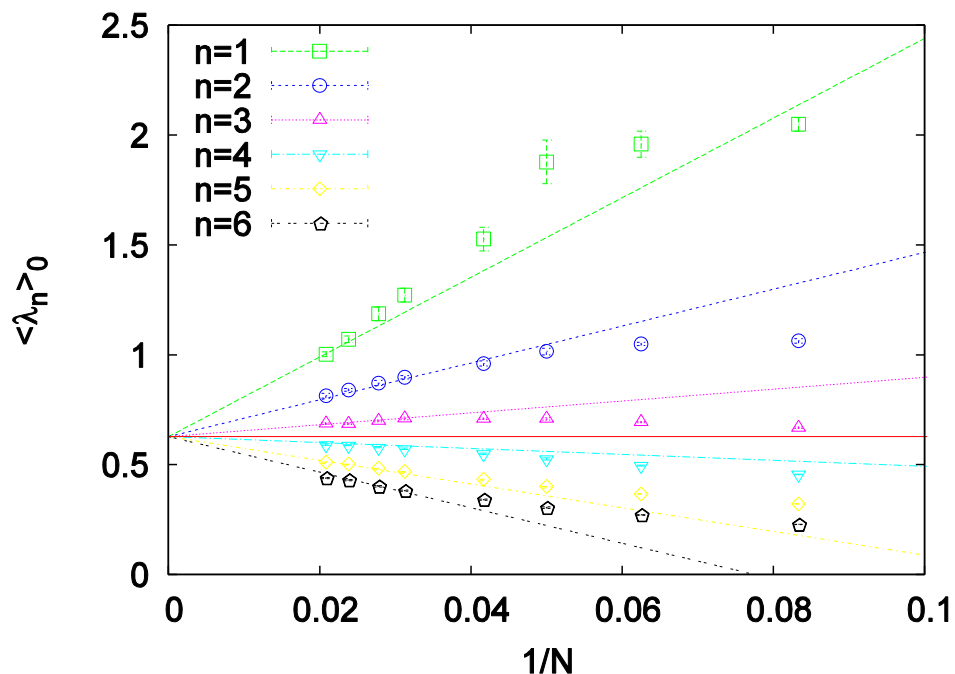
この場合については、SSBの機構がモンテカルロ・シミュレーションにより明らかになった。 “フェルミオン行列式の位相”

# 位相を無視するとSSBは起こらない

Anagnostopoulos – Azuma-J.N., arXiv:1306.6135

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{N} \text{Tr}(A_\mu A_\nu) \quad 6 \times 6 \text{ real symmetric}$$

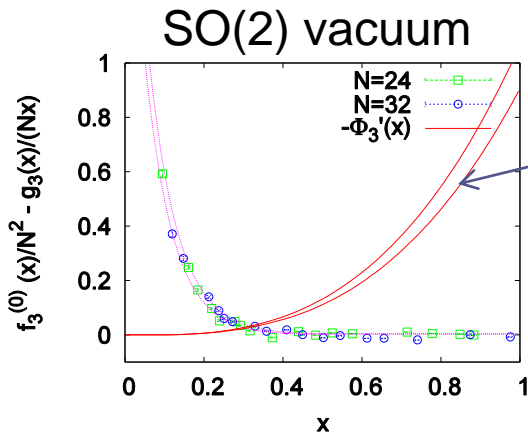
固有値:  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_6$



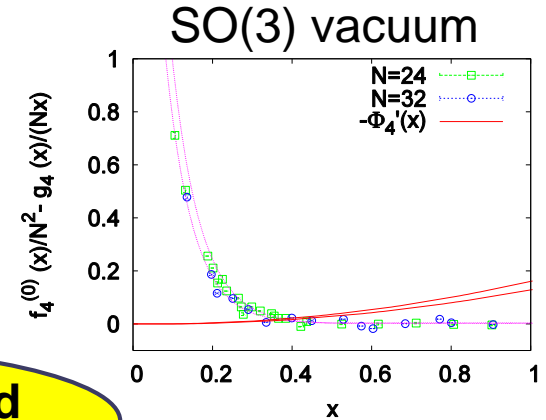
**$N$  を大きくしていくと、すべての固有値が同じ値に収束する！**

# 位相の効果 : universal shrunken direction

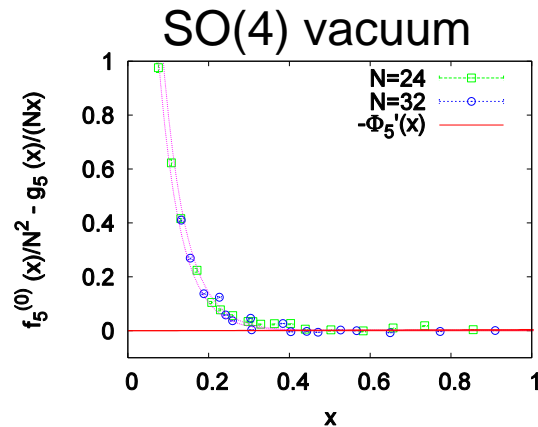
Anagnostopoulos -Azuma-J.N., arXiv:1306.6135



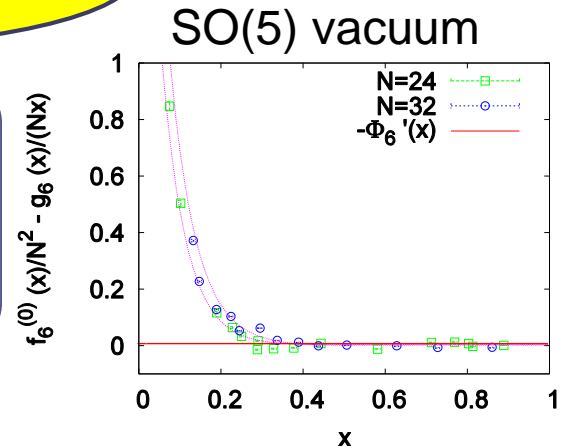
フェルミオン行列式の  
位相の効果



**factorization method  
に基づく解析**



Anagnostopoulos -J.N.  
Phys.Rev. D66 (2002)  
106008  
hep-th/0108041



The extent of the shrunken direction  $x \sim 0.35$  for all vacua.

ガウス展開法の結果とconsistent !

c.f.) 
$$x = \frac{r^2}{\ell^2} \sim \frac{0.223}{0.627} \sim 0.355$$

# 結局のところ、ユークリッド化が問題だったのではないか？

- 通常の場合の理論では、**解析接続**として正当化可能。  
(だからこそ **格子ゲージ理論**を使うことができる。)
- 一方、**重力を含む理論**においては、ユークリッド化は微妙。  
(古典レベルではよいかもしれないが。)
  - **dynamical triangulation**に基づく**量子重力** (Ambjorn et al. 2005)  
(ユークリッド型の重力の問題がローレンツ型の重力では克服可能か。)
  - Colemanの **宇宙項問題に対するworm hole scenario**  
(もともとユークリッド型で提唱されたが、物理的解釈は、ローレンツ型において初めて明確にできる。) Okada-Kawai (2011)
- ユークリッド型の理論は、膨張宇宙のような**実時間のダイナミクス**を調べる上では役に立たない。

# 3. ローレンツ型のタイプIIB行列模型

Kim-J.N.-Tsuchiya PRL 108 (2012) 011601 [arXiv:1108.1540]



# ローレンツ型タイプIIB行列模型の定義

Kim-J.N.-Tsuchiya PRL 108 (2012) 011601 [arXiv:1108.1540]

## 分配関数

$$Z = \int dA d\psi e^{iS} = \int dA e^{iS_b} \text{Pf} \mathcal{M}(A)$$

世界面上の理論とのつながりから、  
こうするのが自然。

$$S = \int d^2\xi \sqrt{g} \left( \frac{1}{4} \{X^\mu, X^\nu\}^2 + \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \{X^\mu, \Psi\} \right)$$

$$\xi_0 \equiv -i\xi_2 \quad (\text{世界面上の座標もWick回転しないといけない。})$$

# 正則化とラージ $N$ 極限

ユークリッド型の模型と異なり、  
ローレンツ型の模型は、そのままではwell-definedでない。



- 時間方向および空間方向の広がり、有限にしておかないといけない。  
(IRのカットオフを導入)

$$\frac{1}{N} \text{tr} (A_0)^2 \leq \kappa L^2$$

$$\frac{1}{N} \text{tr} (A_i)^2 \leq L^2$$

以下では一般性を失うことなく  
 $L = 1$  とする。

- これらの2つのカットオフは、ラージ  $N$  の極限において外せることが判明。  
(この模型の極めて非自明な力学的性質)
- $SO(9,1)$  対称性および超対称性は、これらのカットオフにより破れる。  
この破れの効果はラージ  $N$  の極限をとることにより消えると予想。  
(要検証)

# 符号問題は回避可能！

$$Z = \int dA d\Psi e^{iS} = \int dA e^{iS_b} \text{Pf} \mathcal{M}(A)$$

原因となりうる2つの箇所

## (1) フェルミオンの積分から現れるPfaffian

$$\text{Pf} \mathcal{M}(A) \in \mathbf{R}$$

ラーゼンNでは、正の Pfaffianを持った配位が支配的になる。

ユークリッド型のモデルでは  $\text{Pf} \mathcal{M}(A) \in \mathbf{C}$

この複素位相が  $\text{SO}(10)$  対称性のSSBを引き起こす。

J.N.-Vernizzi ('00), Anagnostopoulos-J.N.('02)

# 符号問題は回避可能！ (続き)

(2)  $e^{iS_b}$  はどうすればよいか？

$$Z = \int dA e^{iS_b} \text{Pf} \mathcal{M}(A)$$

$$A_\mu = \rho \tilde{A}_\mu \quad \text{まず、} \int d\rho \text{ を実行。}$$

$$S_b \propto \text{tr}([A_\mu, A_\nu][A^\mu, A^\nu]) \propto \rho^4$$

$$\text{Pf} \mathcal{M}(A) \propto \rho^{16(N^2-1)}$$

}  $A_\mu$  について  
斉次

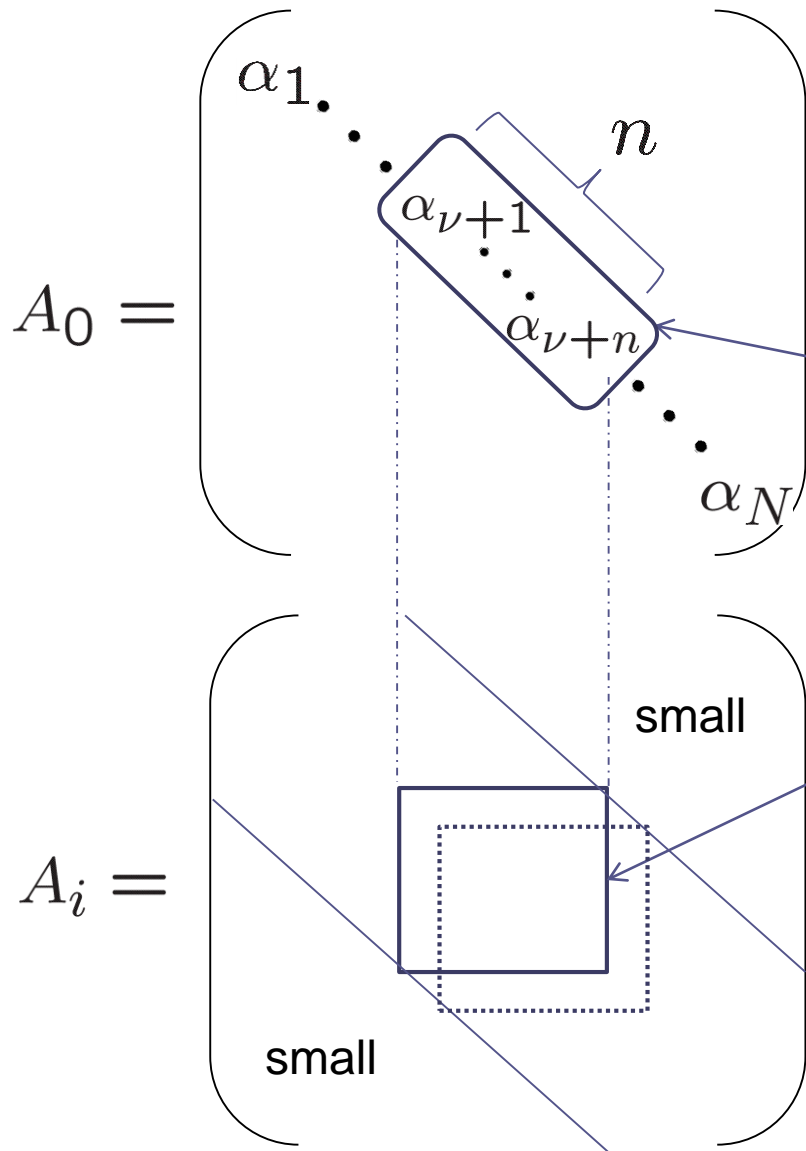
$$Z \propto \int d\tilde{A} \delta(S_b(\tilde{A})) \text{Pf} \mathcal{M}(\tilde{A})$$

同様の問題は、ミンコフスキー時空上の場の理論でも起こる。  
(場の理論における実時間ダイナミクスを調べることは、悪名高い難問。)

# 4. 微視的な9d空間から 膨張する3d宇宙へ

Kim-J.N.-Tsuchiya PRL 108 (2012) 011601 [arXiv:1108.1540]

# 時間発展をどう引き出すか



diagonalize  $A_0$

$$\alpha_1 < \dots < \alpha_N$$

SU(M)  
transformation

時間座標 “t” の定義

$$t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_{\nu+i}$$

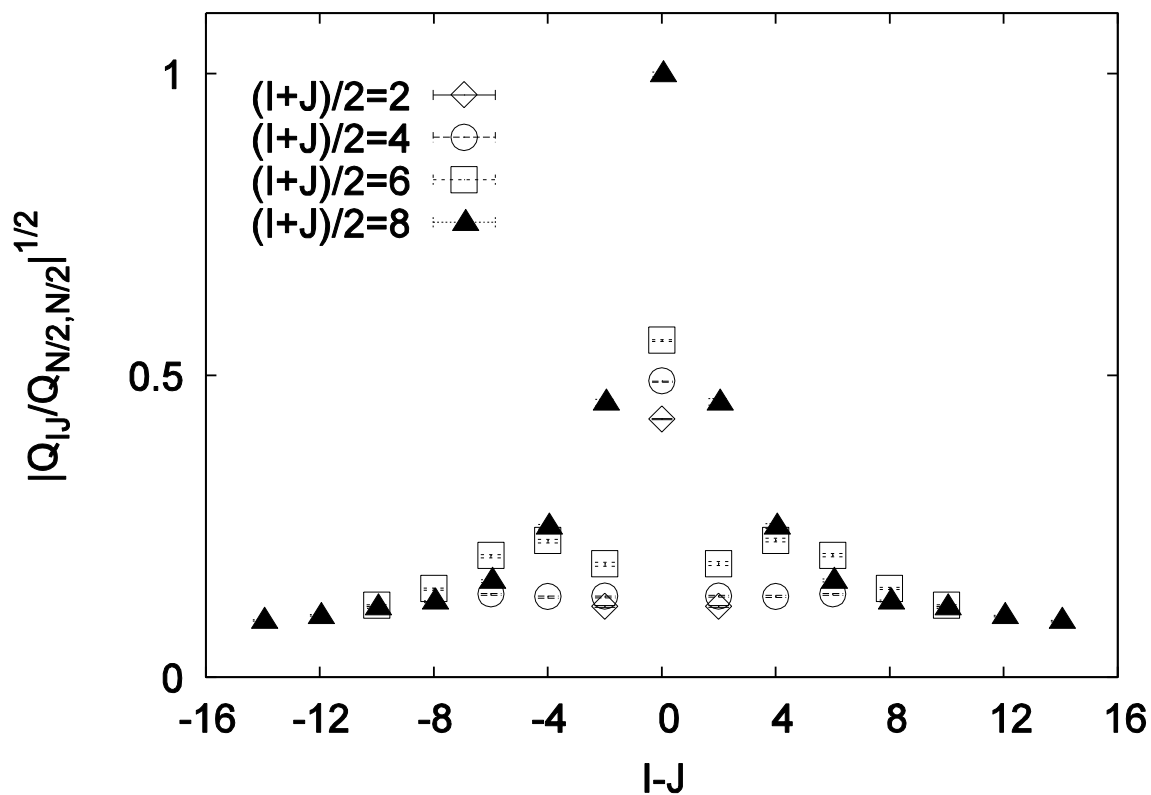
The state of the universe  $\bar{A}_i(t)$  at time  $t$

$A_i$  has a band diagonal structure

非自明な力学的性質

# バンド対角的構造

$N = 16$



$$(A_i)^2 = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Diagonal elements are labeled with  $(I+J)/2$  values: 2, 4, 6, 8.

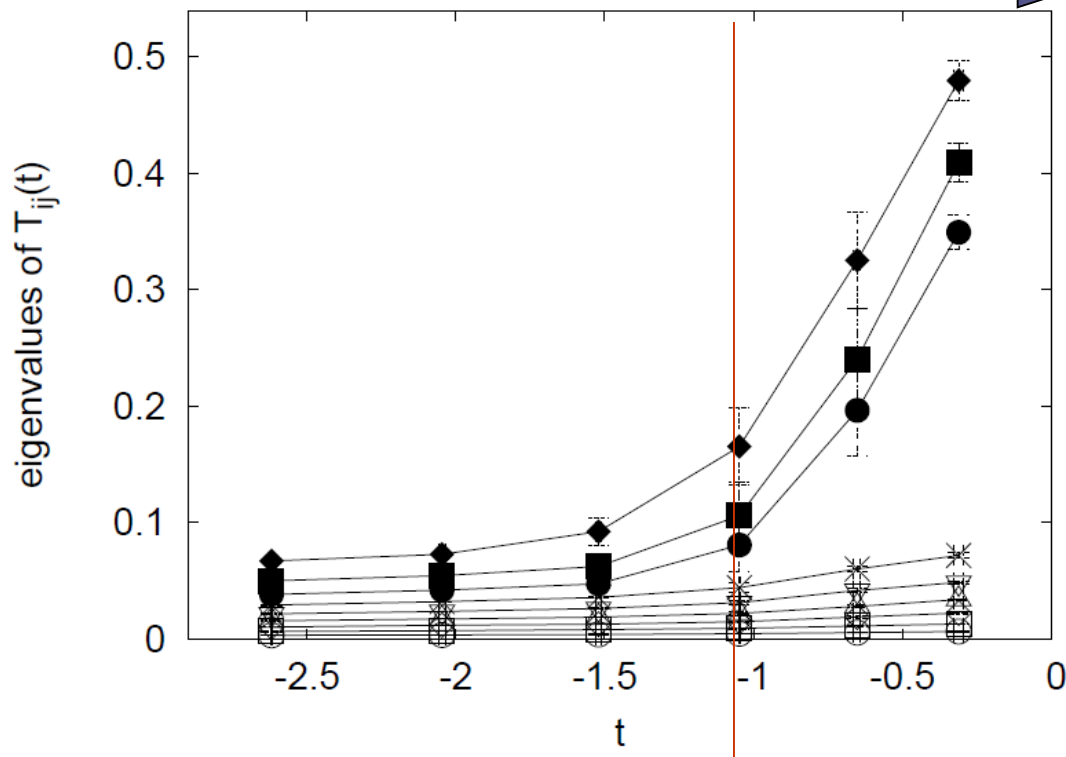
ブロックサイズ  
として  $n = 4$   
を選択

# SO(9)の自発的破れ

Kim-J.N.-Tsuchiya, PRL 108 (2012) 011601

$$T_{ij}(t) = \frac{1}{n} \text{tr} \{ \bar{A}_i(t) \bar{A}_j(t) \}$$

SO(9)  $\xrightarrow{\text{SSB}}$  SO(3)



$N = 16$  ,  $\kappa = 4.0$

“critical time”



# 5. 指数関数の膨張とベキ則的膨張

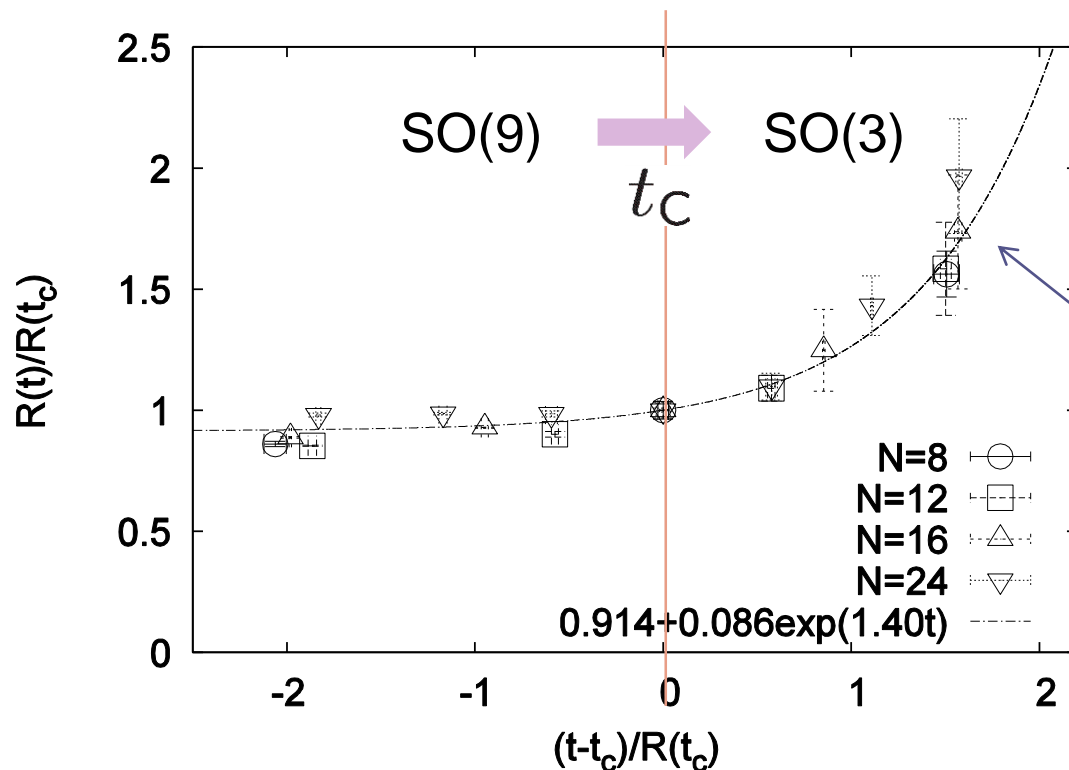
Ito-Kim-Koizuka-J.N.-Tsuchiya, in prep.

Ito-Kim-J.N.-Tsuchiya, work in progress

# 指数関数の膨張

Ito-Kim-J.N.-Tsuchiya, work in progress

$$R(t)^2 \equiv \frac{1}{n} \text{tr} \bar{A}_i(t)^2$$



$f(x) = a + (1 - a)e^{bx}$   
で良くフィットできる。

指数関数的膨張

インフレーション

# フェルミオン作用の効果

$$\begin{aligned} S_f &= \text{tr}(\bar{\Psi}_\alpha(\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}[A_\mu, \Psi_\beta]) \\ &= \text{tr}(\bar{\Psi}_\alpha(\Gamma^0)_{\alpha\beta}[A_0, \Psi_\beta]) + \text{tr}(\bar{\Psi}_\alpha(\Gamma^i)_{\alpha\beta}[A_i, \Psi_\beta]) \end{aligned}$$

early timesにおいて支配的

late timesにおいて支配的



第一項のみを残す



early timesにおける  
簡単化した模型

late timesにおける  
簡単化した模型

$$\text{Pf}M(A) \simeq \Delta^{d-1} = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^{2(d-1)}$$

$$\text{Pf}M(A) \simeq 1$$

repulsive force between eigenvalues of  $A_0$

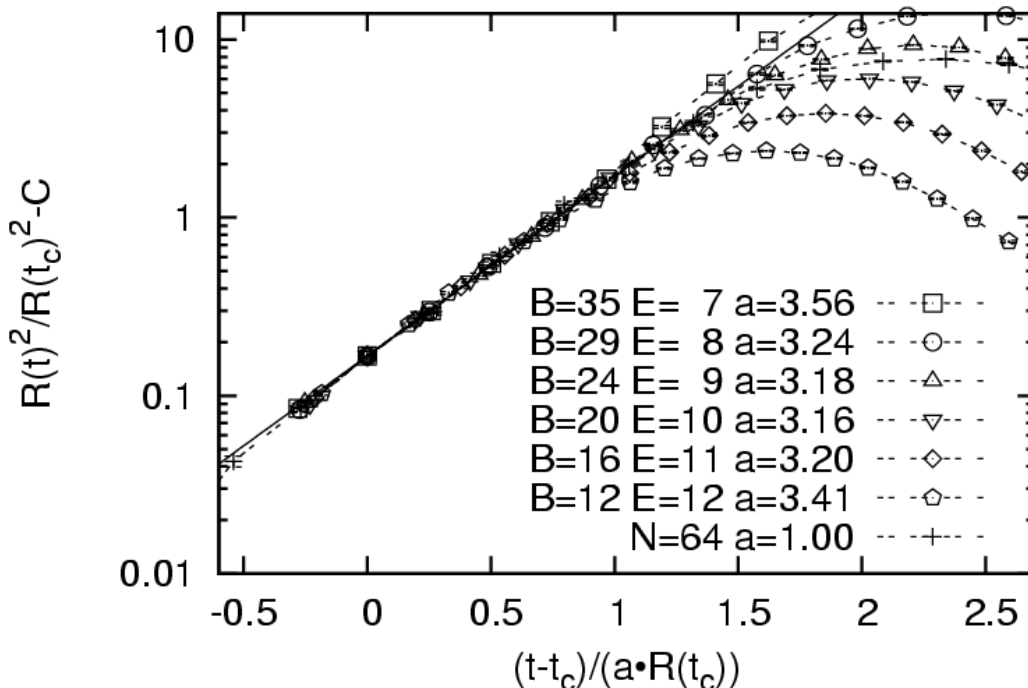
quench fermions

# Early timesにおける指数関数的膨張

Ito-Kim-Koizuka-J.N.-Tsuchiya, in prep.

- early timesにおける簡単化した模型

$$\text{Pf}\mathcal{M}(A) \simeq \Delta^{d-1} = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^{2(d-1)}$$



指数関数的膨張

第一項が、指数関数的膨張において重要。

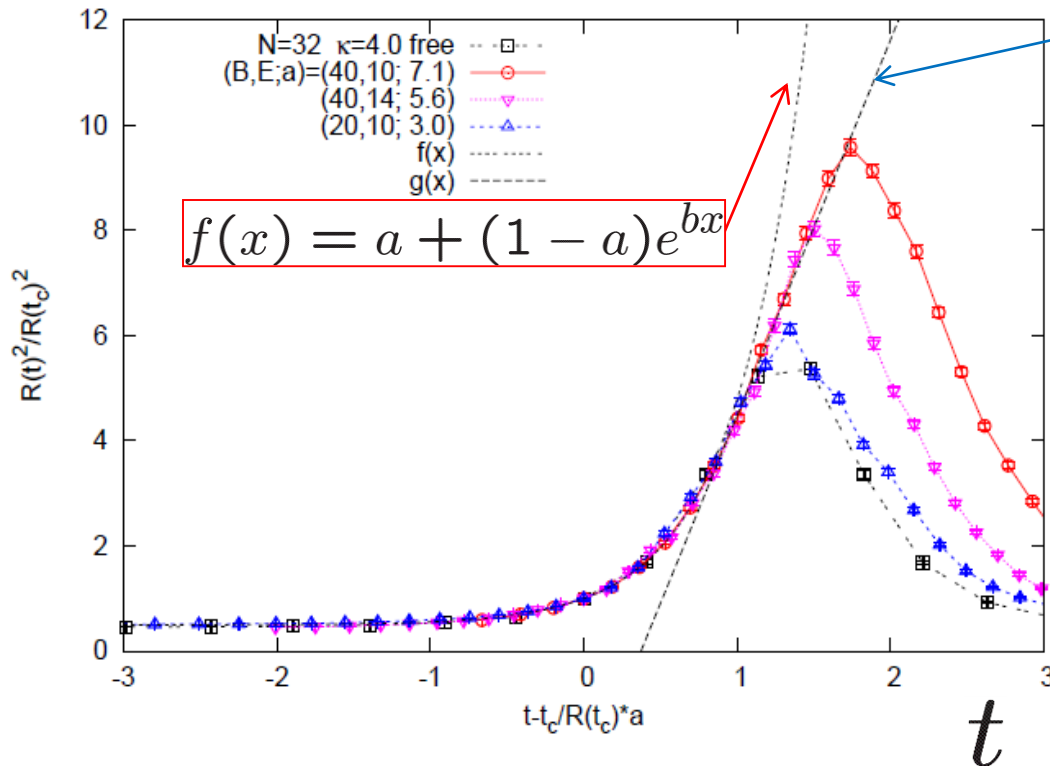
# late timesにおけるベキ則的膨張

Ito-Kim-J.N.-Tsuchiya, work in progress

- late timesにおける単純化した模型

$$\text{PfM}(A) \simeq 1$$

$R^2$



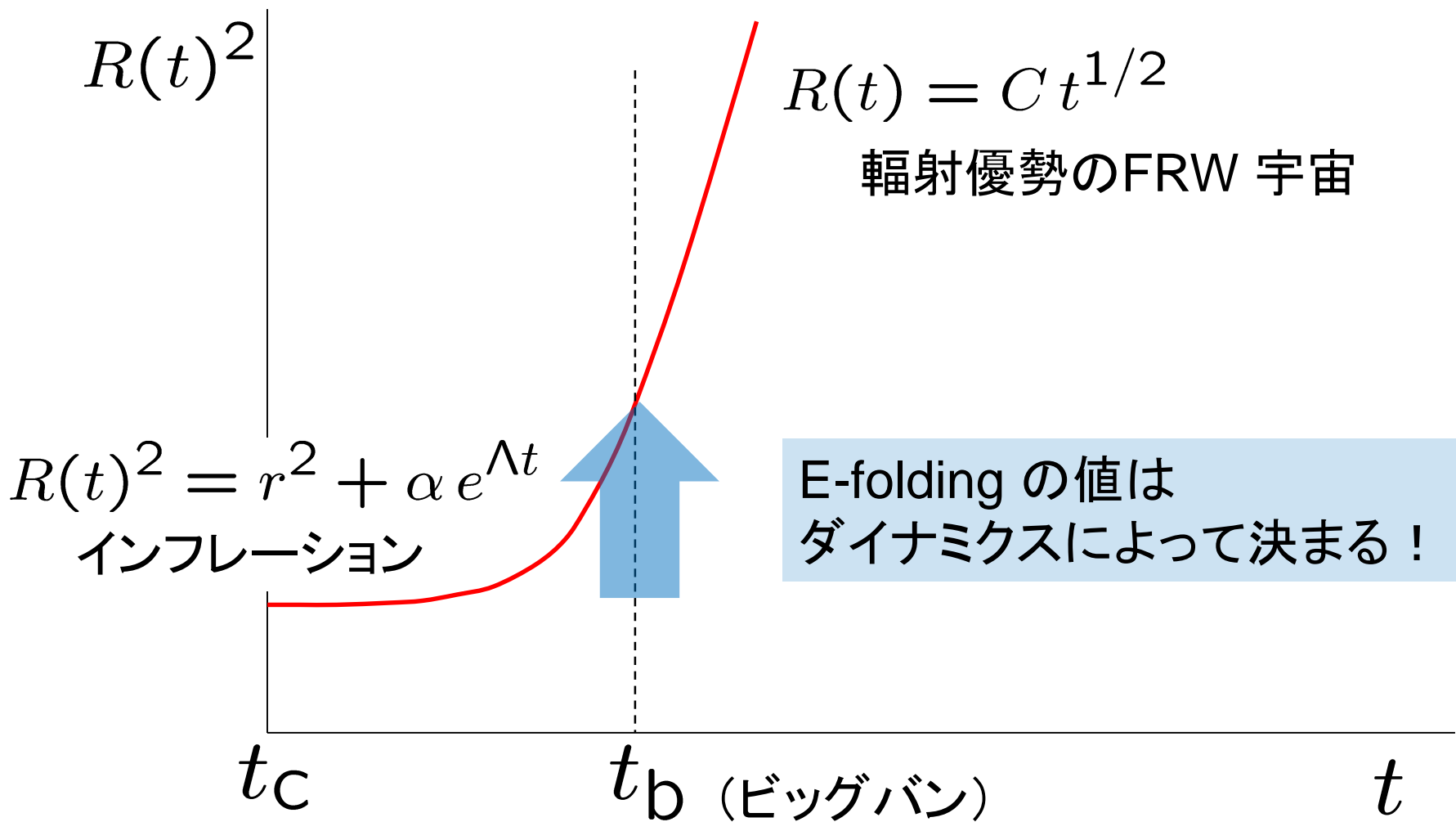
$$g(x) = ax + b$$

$$R^2 \sim t \Rightarrow R \sim t^{1/2}$$

$t^{1/2}$  behavior

輻射優勢のFRW 宇宙

# フルのローレンツ型IIB行列模型 に対して予想されるシナリオ



## 6. さらに時間が経過した後の時間発展

S.-W. Kim, J. N. and A.Tsuchiya, Phys. Rev. D86 (2012) 027901  
[arXiv:1110.4803]

S.-W. Kim, J. N. and A.Tsuchiya, JHEP 10 (2012) 147 [arXiv:1208.0711]

さらに時間が経過した後の時間発展

$$Z = \int dA d\Psi e^{iS} = \int dA e^{iS_b} \text{Pf} \mathcal{M}(A)$$

宇宙膨張の結果、作用の各項が大きくなる。

➡ 古典近似が有効。

- 実は **無限個の古典解が存在**。(ランドスケープと類似)
- (3+1)次元の膨張宇宙を表す解が存在。  
その中には、**宇宙項問題を自然に解決**するものもある。
- それぞれの解に対する「重み」は well-defined であるから、late times において支配的となる「唯一の解」を決定可能。
- 解のまわりの揺らぎを調べることにより、**プランクスケール以下の有効場の理論を得ることが可能**。



# 古典運動方程式を解く一般的な処方箋

- 変分関数  $(i = 1, \dots, 9)$

$$\tilde{S} = \text{tr} \left( -\frac{1}{4} [A_\mu, A_\nu] [A^\mu, A^\nu] + \frac{\tilde{\lambda}}{2} (A_0^2 - \kappa L^2) - \frac{\lambda}{2} (A_i^2 - L^2) \right)$$

- 古典運動方程式

$$-[A_0, [A_0, A_i]] + [A_j, [A_j, A_i]] - \lambda A_i = 0$$

$$[A_j, [A_j, A_0]] - \tilde{\lambda} A_0 = 0$$

- 交換関係

$$[A_i, A_j] = iC_{ij}$$

$$[A_i, C_{jk}] = iD_{ijk}$$

$$[A_0, A_i] = iE_i$$

$$[A_0, E_i] = iF_i$$

$$[A_i, E_j] = iG_{ij} \dots$$

運動方程式とJacobi恒等式



Lie 代数



ユニタリ表現

しかるべきAnsatzを課すことにより、有限次元にできる。



古典解

# SO(4) 対称な解の例 (RxS<sup>3</sup> 時空)

$$\text{EOM} \quad \frac{\delta}{\delta A_\mu} \left( -\frac{1}{4} \text{tr}([A_\mu, A_\nu]^2) - \frac{\lambda}{2} \text{tr}(A_i)^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} \text{tr}(A_0)^2 \right) = 0$$

$$A_0 = bT_0 \otimes 1_k$$

$$A_i = \alpha b T_1 \otimes M_i \quad (i = 1 \sim 4)$$

$$A_5 \sim A_9 = 0$$

$SL(2, R)$  代数

$$[T_0, T_1] = iT_2 \quad [T_0, T_2] = -iT_1 \quad [T_1, T_2] = -iT_0$$

$$M_i = \text{diag}(n_i^{(1)}, \dots, n_i^{(k)}) \quad (i = 1, \dots, 4)$$

$$|n^{(I)}| = 1 \quad (I = 1, \dots, k) \quad \text{単位S}^3 \text{上に一様に分布}$$

$$\lambda = -b^2, \quad \tilde{\lambda} = -\alpha^2 b^2$$

空間方向は可換。

# SO(4) 対称な解の例 (RxS<sup>3</sup> 時空)

primary unitary series

$$(T_0)_{mn} = n\delta_{mn}$$

$$(T_1)_{mn} = -\frac{i}{2} \left( n - i\rho + \frac{1}{2} \right) \delta_{m,n+1} + \frac{i}{2} \left( n + i\rho - \frac{1}{2} \right) \delta_{m,n-1}$$

ブロックサイズは  $n=3$  ととれる。

空間の広がり

$$R(n) = \sqrt{\frac{1}{3} \text{tr}(\bar{A}_i(n)^2)} = \frac{\alpha b}{\sqrt{3}} \sqrt{n^2 + \rho^2 + \frac{1}{4}} \longrightarrow R(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \sqrt{t^2 + t_0^2}$$

時空の非可換性

$$\frac{-\frac{1}{3} \text{tr}([\bar{A}_0(n), \bar{A}_1(n)]^2)}{\frac{1}{3} \text{tr}(\bar{A}_0(n))^2 \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{A}_1(n))^2} = \frac{1}{n^2 + \frac{2}{3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{可換な時空！}$$

連続極限  $b \rightarrow 0$  with  $t = nb$ ,  $\rho b = t_0$

$$\lambda = -b^2 \rightarrow 0$$

$$\tilde{\lambda} = -\alpha^2 b^2 \rightarrow 0$$

カットオフが  
外せることと  
consistent !

# SO(4) 対称な解の例 (RxS<sup>3</sup> 時空) 続き

$$R(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \sqrt{t^2 + t_0^2} \equiv a(t)$$

$$\rightarrow H = \frac{\dot{a}}{a} \sim a^{-\frac{3}{2}(1+w)} \quad w = -\frac{1}{3} \left( \frac{2t_0^2}{t^2} + 1 \right)$$

$$t = t_0 \longrightarrow w = -1$$

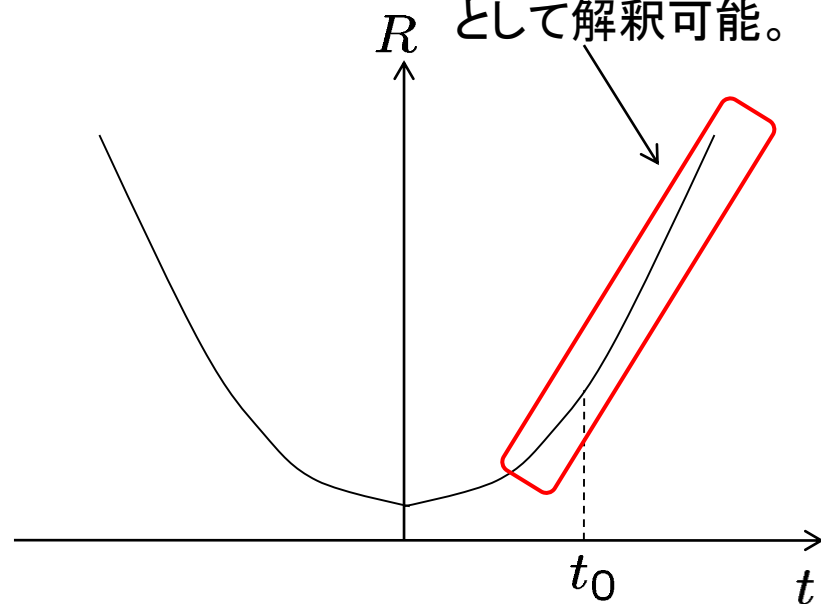
宇宙定数  $\sim (1/t_0)^4$

現在における加速膨張を説明可能。

$$t \rightarrow \infty \longrightarrow w = -\frac{1}{3}$$

宇宙定数は、遠い未来において漸近的にゼロになる。

この部分は、  
late-timeの振舞  
として解釈可能。



宇宙項問題に対する自然な解決。

## 7. まとめと展望

# まとめ

## タイプ IIB 行列模型 (1996)

超弦理論の非摂動的定式化  
(10次元のタイプIIB理論に基づく)

ユークリッド型の模型の問題点が明らかになった。

ローレンツ型の模型：不安定性のため最近まで手つかず。  
モンテカルロ・シミュレーションにより、驚くべき性質が明らかに。

- well-definedな理論が得られる！  
(まずカットオフを導入、ついでそれをラージN極限で外す。)
- “時間発展” という概念が力学的に出現  
    
$$\left[ \begin{array}{l} A_0 \text{ を対角化したときに,} \\ A_i \ (i = 1, \dots, 9) \text{ がバンド対角的な構造を持つ} \end{array} \right]$$
- “臨界時刻”後, 空間のSO(9)対称性が自発的に破れ,  
    3方向だけが膨張し始める。
- 指数関数的膨張が観測された (インフレーション, 初期条件問題は存在せず)
- ベキ則 ( $t^{1/2}$ ) 膨張が、later timesに対する簡単化した模型で観測された。
- さらに later times では、古典的解析が有効。  
    宇宙項問題に対する自然な解決が示唆された。

# 今後の展望

- 指数関数的膨張からベキ則的膨張への転移を直接モンテカルロ・シミュレーションで観測できるか？
- それと同時に、可換な時空への転移（古典解からの示唆あり）は起こるのか？
- CMBと比較可能な密度ゆらぎを計算できるか？
- 古典解まわりのゆらぎからプランクスケール以下の有効場の理論を読み取れるか？
- 低エネルギーで Standard Model が現れるか？ (土屋氏の講演)

素粒子論と宇宙論における様々な基礎的な問題：

インフレーションの機構, 初期値問題,  
宇宙項問題, 階層性問題,  
暗黒物質, 暗黒エネルギー, baryogenesis,  
ヒッグス場の起源, 世代数の起源 etc.

これらすべての問題を、超弦理論の非摂動的定式化を用いることにより、  
統一的に理解できる可能性がある！

Backup slides



# Previous works in the Euclidean matrix model

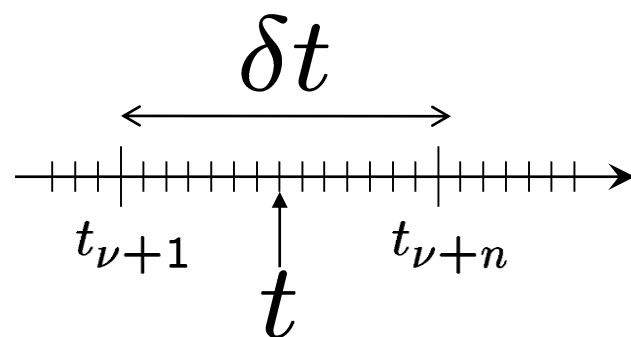
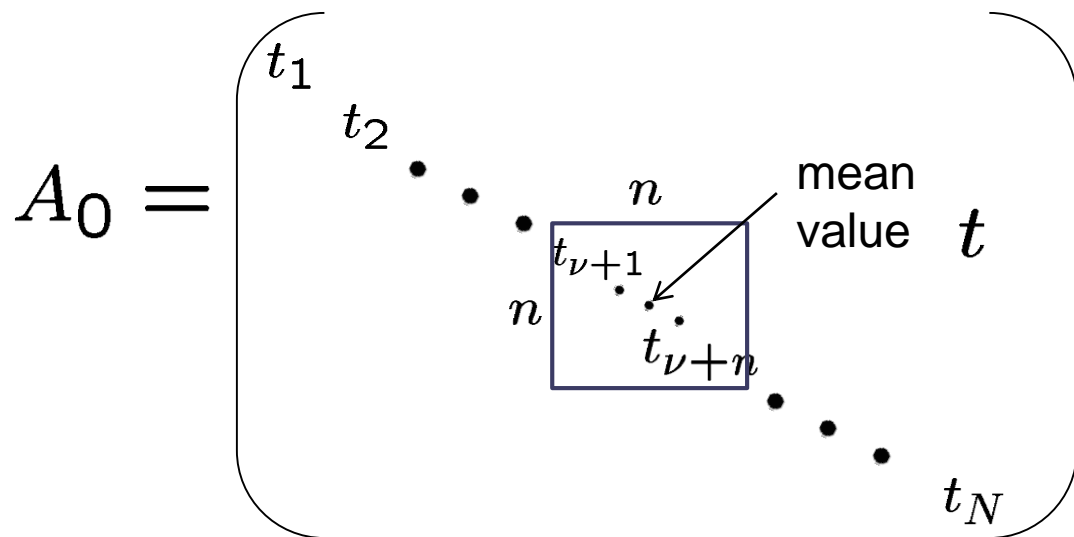
( A model with  $SO(10)$  rotational symmetry  
instead of  $SO(9,1)$  Lorentz symmetry )

Dynamical generation of 4d space-time ?

SSB of  $SO(10)$  rotational symmetry

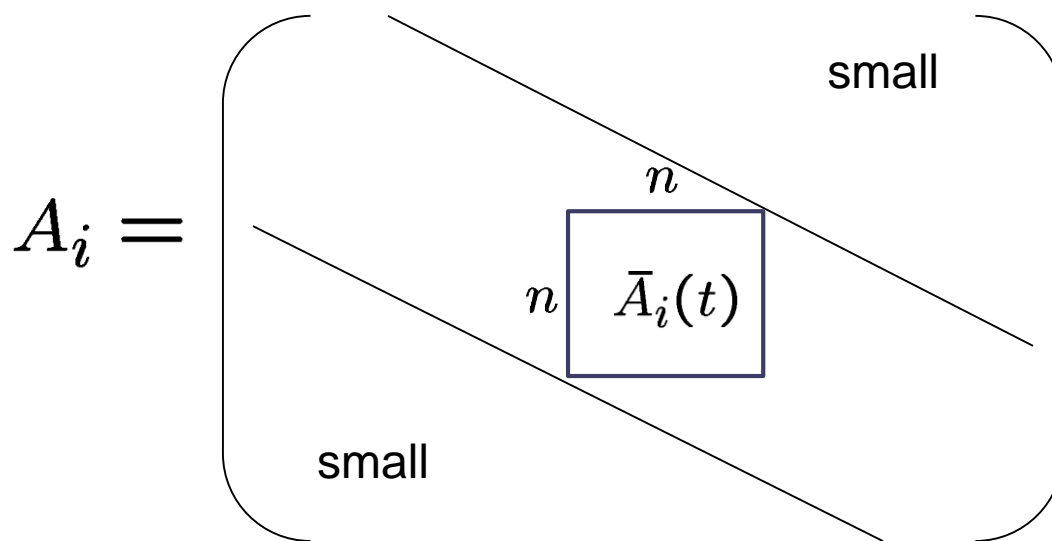
- perturbative expansion around diagonal configurations,  
branched-polymer picture  
Aoki-Iso-Kawai-Kitazawa-Tada(1999)
- The effect of complex phase of the fermion determinant (Pfaffian)  
J.N.-Vernizzi (2000)
- Monte Carlo simulation  
Ambjorn-Anagnostopoulos-Bietenholz-Hotta-J.N.(2000)  
Anagnostopoulos-J.N.(2002)
- Gaussian expansion method  
J.N.-Sugino (2002), Kawai-Kawamoto-Kuroki-Matsuo-Shinohara(2002)
- fuzzy  $S^2 \times S^2$   
Imai-Kitazawa-Takayama-Tomino(2003)

# Emergence of the notion of “time-evolution”



$$\nu = 0, 1, \dots, N - n$$

$$t = \frac{1}{n} \sum_{a=1}^n t_{\nu+a}$$



band-diagonal  
structure

$\bar{A}_i(t)$  represents the state  
at the time  $t$

# The emergence of “time”

Supersymmetry plays a crucial role!

Calculate the effective action for

$$A_0 = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

at one loop.

$$\left( \Delta = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \right)$$

}	$A_i$ ( $i = 1, \dots, d$ )	contributes	$\Delta^{-d}$
	$\Psi_\alpha$ ( $\alpha = 1, \dots, p$ )	contributes	$\Delta^{p/2}$
	Contribution from van der Monde determinant		$\Delta$

Altogether,

$$\Delta^{-d+p/2+1}$$

→ Zero, in a supersymmetric model !  
(e.g.,  $d = 9, p = 16$ )

Attractive force between the eigenvalues in the bosonic model, cancelled in supersymmetric models.

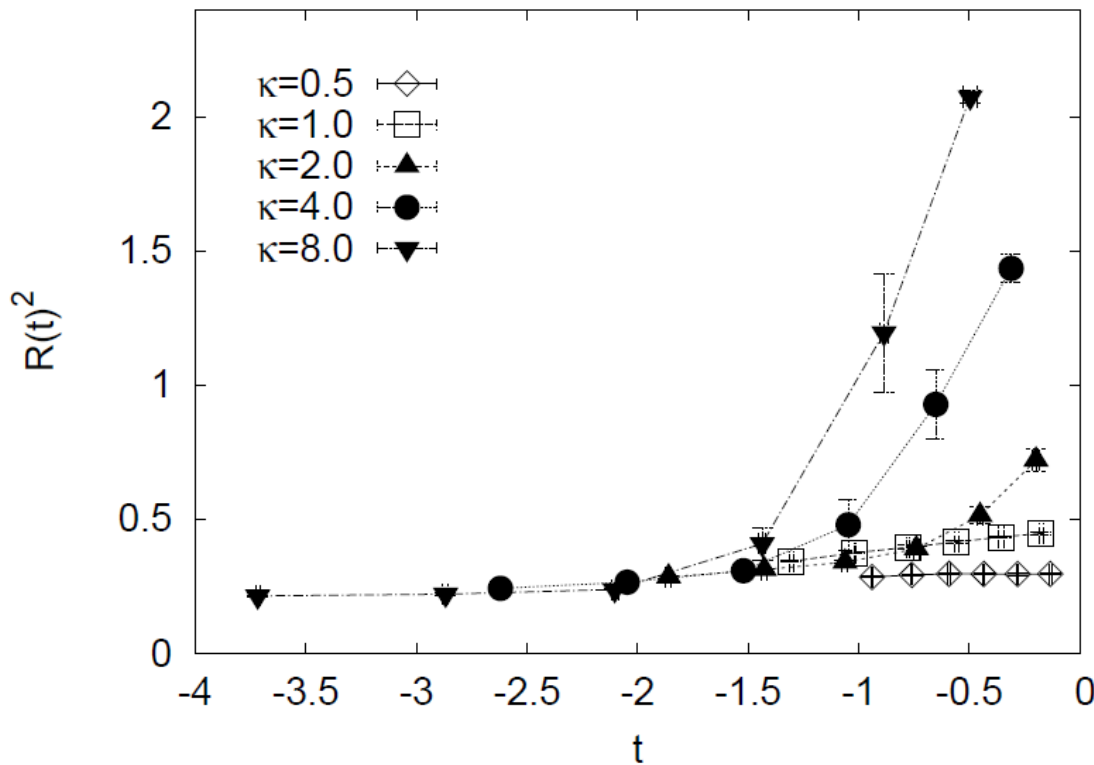
# The time-evolution of the extent of space

$$R(t)^2 \equiv \frac{1}{n} \text{tr} \bar{A}_i(t)^2$$

$$N = 16, \quad n = 4$$

symmetric under  $t \rightarrow -t$

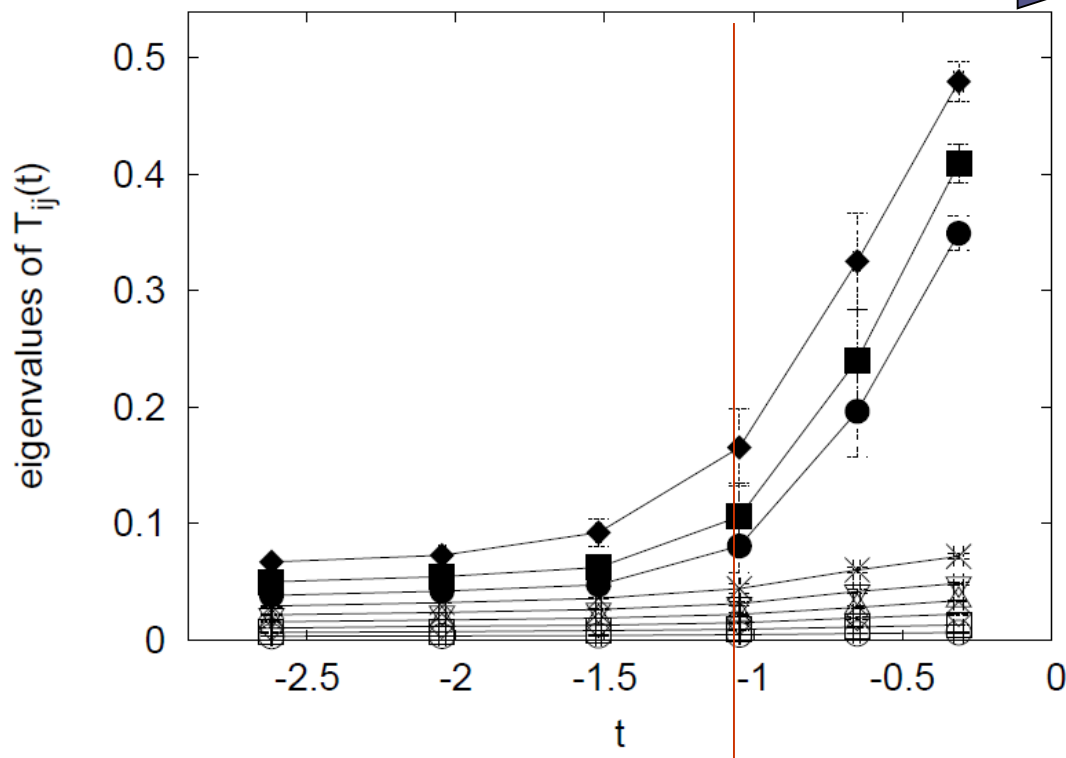
We only show the region  $t < 0$



# SSB of SO(9) rotational symmetry

$$T_{ij}(t) = \frac{1}{n} \text{tr} \{ \bar{A}_i(t) \bar{A}_j(t) \}$$

SO(9)  $\xrightarrow{\text{SSB}}$  SO(3)



$N = 16$  ,  $\kappa = 4.0$

“critical time”

# What can we expect by studying the time-evolution at later times

- What is seen by Monte Carlo simulation so far is:  
[the birth of our Universe](#)
- **What has been thought to be the most difficult from the bottom-up point of view**, can be studied first.  
This is a typical situation in a top-down approach !
- We need to study **the time-evolution at later times** in order to see the Universe as we know it now!
  - Does [inflation](#) and [the Big Bang](#) occurs ?  
(**First-principles description based on superstring theory**, instead of just a phenomenological description using “inflaton”; comparison with CMB etc..)
  - How does the [commutative space-time](#) appear ?
  - What kind of [massless fields](#) appear on it ?
  - [accelerated expansion](#) of the present Universe ([dark energy](#)), understanding **the cosmological constant problem**
  - prediction for [the end of the Universe](#) (Big Crunch or Big Rip or...)

# Ansatz

extra dimension is small  $\longrightarrow A_i = 0$  for  $i > d$   
 (compared with Planck scale)

commutative space  $\longrightarrow [A_i, A_j] = 0$

$$[\boxed{A_i}, A_j] = i\cancel{C_{ij}}$$

$$[A_i, C_{jk}] = i\cancel{D_{ijk}}$$

$$[\boxed{A_0}, A_i] = i\boxed{E_i}$$

$$[A_0, E_i] = iF_i \quad \longleftarrow -[A_0, [A_0, A_i]] + [A_j, [A_j, A_i]] - \lambda A_i = 0$$

$$[A_i, E_j] = iG_{ij} \dots$$

$$\boxed{F_i = \lambda A_i}$$

$$G_{ij} = \boxed{M_{ij}} + \cancel{N_{ij}} + \frac{1}{d}\delta_{ij}H \quad \longleftarrow [A_j, [A_j, A_0]] - \tilde{\lambda}A_0 = 0$$

$$\boxed{H = \tilde{\lambda}A_0}$$

$$[A_0, [A_i, A_j]] + [A_i, [A_j, A_0]] + [A_j, [A_0, A_i]] = 0$$

# Simplification

$$M_{ij} = 0 \text{ for } i \neq j$$

$$M_i \equiv M_{ii} \quad \sum_{i=1}^d M_i = 0$$



Lie algebra

$$[A_i, A_j] = 0, \quad [A_0, A_i] = iE_i, \quad [A_0, E_i] = i\lambda A_i,$$

$$[E_i, E_j] = 0, \quad [A_i, E_j] = i\delta_{ij} \left( \frac{\tilde{\lambda}}{d} A_0 + M_i \right), \quad [A_0, M_i] = 0,$$

$$[A_i, M_j] = i\frac{\tilde{\lambda}}{d}(1 - d\delta_{ij})E_i, \quad [E_i, M_j] = i\frac{\lambda\tilde{\lambda}}{d}(1 - d\delta_{ij})A_i, \quad [M_i, M_j] = 0$$

e.g.)

$$d = 2, \quad \lambda > 0, \quad \tilde{\lambda} > 0 \quad \longrightarrow \quad \text{SO}(2, 2)$$



# d=1 case

$$[A_0, A_1] = iE, \quad [A_0, E] = i\lambda A_1, \quad [A_1, E] = i\tilde{\lambda}A_0$$

SO(9) rotation  $\longrightarrow r_i A_1$  ( $i = 1, \dots, 9$ ) with  $r_i^2 = 1$

Take a direct sum

$$A'_0 = A_0 \otimes \mathbb{1}_K$$

$$A'_i = A_1 \otimes \text{diag}(r_i^{(1)}, r_i^{(2)}, \dots, r_i^{(K)})$$

$$\text{where } r_i^{(m)2} = 1 \quad (m = 1, \dots, K)$$

$r^{(m)}$  distributed on a unit  $S^3$

$\longrightarrow$  (3+1)D space-time  $\sim \mathbb{R} \times S^3$

A complete classification of d=1 solutions has been done. Below we only discuss a physically interesting solution.

# SL(2,R) solution

➤ SL(2,R) solution

$$[A_0, A_1] = iE, \quad [A_0, E] = i\lambda A_1, \quad [A_1, E] = i\tilde{\lambda}A_0$$



$$A_0 = aT_2, \quad A_1 = bT_0, \quad E = cT_1$$
$$\lambda = a^2, \quad \tilde{\lambda} = b^2, \quad ab = c$$

$$[T_0, T_1] = iT_2, \quad [T_2, T_0] = iT_1, \quad [T_1, T_2] = -iT_0$$

➤ realization of the SL(2,R) algebra on  $\{e^{in\theta}; n \in \mathbb{Z}\}$

$$\mathcal{T}_0 = i\frac{d}{d\theta} + \epsilon$$

$$\mathcal{T}_1 = \frac{i}{2} \left[ (\tau + \epsilon)e^{i\theta} + (\tau - \epsilon)e^{-i\theta} - 2\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right]$$

$$\mathcal{T}_2 = \frac{1}{2} \left[ -(\tau + \epsilon)e^{i\theta} + (\tau - \epsilon)e^{-i\theta} - 2i\cos\theta \frac{d}{d\theta} \right]$$

# Space-time structure in $SL(2, \mathbb{R})$ solution

➤ primary unitary series representation

$$(T_0)_{mn} = n\delta_{mn}$$

$$(T_1)_{mn} = -\frac{i}{2}\left(n - i\rho + \frac{1}{2}\right)\delta_{m,n+1} + \frac{i}{2}\left(n + i\rho - \frac{1}{2}\right)\delta_{m,n-1}$$

$$(T_2)_{mn} = -\frac{1}{2}\left(n - i\rho + \frac{1}{2}\right)\delta_{m,n+1} - \frac{1}{2}\left(n + i\rho - \frac{1}{2}\right)\delta_{m,n-1}$$

tri-diagonal

Space-time noncommutativity  
disappears in the continuum limit.


$$\bar{A}_0(n) = a \begin{pmatrix} n-1 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_K$$

$$\bar{A}_1(n) = \frac{ib}{2} \begin{pmatrix} 0 & n + i\rho - \frac{1}{2} & 0 \\ -n + i\rho + \frac{1}{2} & 0 & n + i\rho + \frac{1}{2} \\ 0 & -n + i\rho - \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \otimes \text{diag}(r_i^{(1)}, \dots, r_i^{(K)})$$

# Cosmological implication of $SL(2, \mathbb{R})$ solution

➤ the extent of space

$$R(n) \equiv \sqrt{\frac{1}{3K} \text{tr}(\bar{A}_1(n))^2} = \sqrt{\frac{b^2}{3} \left( n^2 + \rho^2 + \frac{1}{4} \right)}$$

  
 $t = na, \quad t_0 = \rho a$

cont. lim.  $a \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \rho \rightarrow \infty$

$$R(t) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{3} (t^2 + t_0^2)}$$

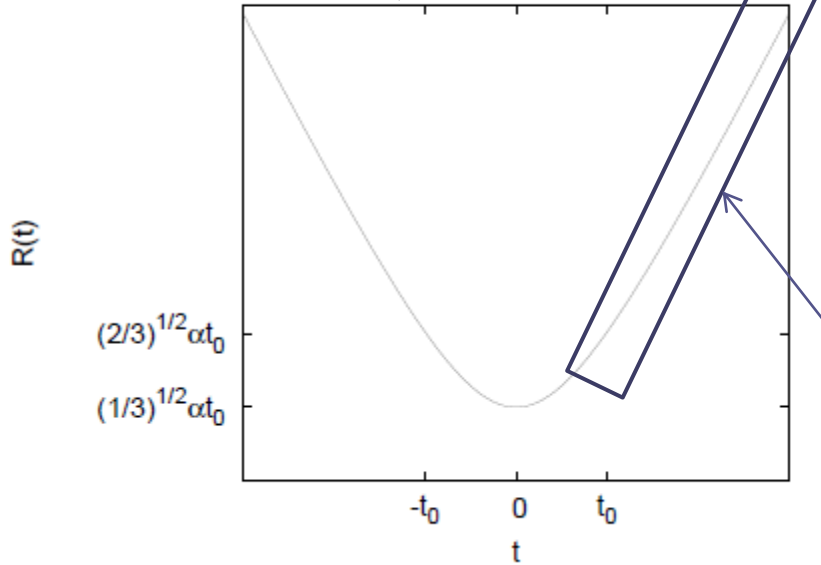
➤ Hubble constant and the  $w$  parameter

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = c R(t)^{-\frac{3}{2}(1+w)}$$

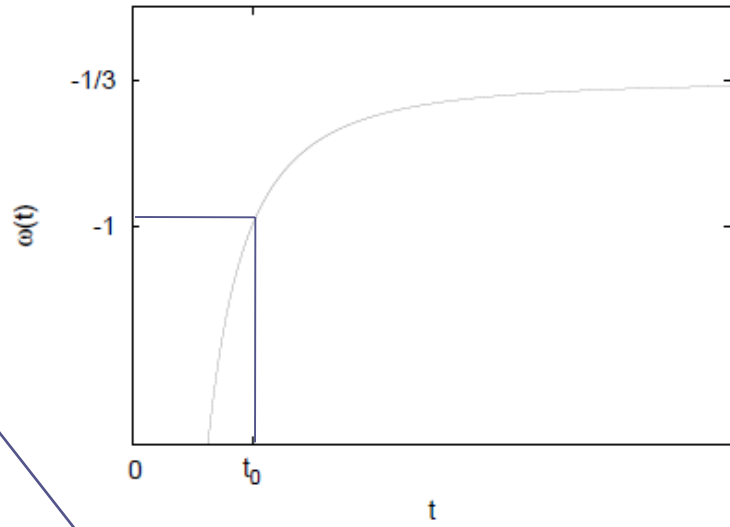
$$\left\{ \begin{array}{ll} w = \frac{1}{3} & \text{radiation dominant} \\ w = 0 & \text{matter dominant} \\ w = -1 & \text{cosmological constant} \end{array} \right.$$

# Cosmological implication of $SL(2, R)$ solution (cont'd)

$$R(t) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{3}(t^2 + t_0^2)}$$



$$w = -\frac{2t_0^2}{3t^2} - \frac{1}{3}$$



$t_0$  is identified with the present time.



$w = -1$  present accelerated expansion  
 cosmological const.  $\sim (1/t_0)^4$   
 $w \rightarrow -\frac{1}{3}$  for  $t \rightarrow \infty$

This part is considered to give the late-time behavior of the matrix model

a solution to the cosmological constant problem

Cosmological constant disappears in the future.

# Seiberg's rapporteur talk (2005) at the 23<sup>rd</sup> Solvay Conference in Physics

hep-th/0601234

## “Emergent Spacetime”

*Understanding **how time emerges** will undoubtedly shed new light on some of the most important questions in theoretical physics including **the origin of the Universe**.*

**Indeed in the Lorentzian matrix model,  
not only space but also time emerges,  
and the origin of the Universe seems to be clarified.**

# The significance of the unique determination of the space-time dimensionality

It strongly suggests that

**superstring theory has a unique nonperturbative vacuum.**

By studying the time-evolution further, one should be able to see the emergence of commutative space-time and massless fields propagating on it.

It is conceivable that **the SM can be derived uniquely.**

This amounts to “proving” the superstring theory.

It is sufficient to identify **the classical configuration which dominates at late times** by studying the time-evolution at sufficiently late times.

Independently of this, it is important to study classical solutions and to study the fluctuations around them.

Does chiral fermions appear ?

Is SUSY preserved ?

The key lies in the structure in the extra dimensions.