数値積分について

UEDA, Satoru

Feb. 6, 2013

1 依頼内容

またMathieu関数の積分も必要なので精度の良い積分の方法も教えていただけると助かります。

2 数値積分に関して

被積分関数が定義域・値域ともに有界で連続な関数のとき、コーディングの手間と精度を考えるとまず最初にシンプソンの公式を試すのがいいと思います。

積分範囲 $[a,b]$ を $N=2n$ 等分し $x_i = a+ih, h=(b-a)/N, (i=0,1,\ldots,N)$, 特に $x_0=a, x_N=b$ とする時

$$\int_a^b f(x)dx \sim \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})+f(x_N)\right] \tag{1}$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{N-2})+4f(x_{N-1})+f(x_N)\right] \tag{2}$$

で積分を近似する公式です。

3 シンプソンの公式の導出について

シンプソンの公式の導出を簡単に紹介します。関数 $f(x)$ のある区間 $[a,b]$ を 3 点 $(a,f(x)),(m,f(m)),(b,f(b))$, を通る 2 次関数 $P(x)$,

$$P(x) = f(a)\frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m)\frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}, \tag{3}$$

で近似すると積分 $\int_a^b f(x)dx$ は,

$$\int_a^b f(x)dx \sim \int_a^b P(x) = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(m)+f(b)\right], \tag{4}$$

と計算できる, だたし $m=(a+b)/2$。

積分区間 $[a,b]$ が大きい時は小さな部分範囲に分割し、結果を足し合わせることで積分の近似式 (1) が得られる。